数学分析笔记

(数学分析 甲I/II(H) 陈锦辉老师班)

数学分析是以“ 极限 ”为工具，运用分析的方法研究实函数的一门数学学科。

薛辰立

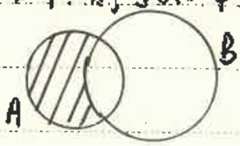
§1 集合 $A=\{x|\varphi(x)\}$

1.有限集：不能和真子集建立一一对应关系（元素个数有限 × ：重复定语）

2.证明：$\phi\subseteq A$

反证：若$\phi\not\subseteq A$，则$\exists a\in\phi$且$a\notin A$ 矛盾.

3.差集 $A-B$



对称差 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

4.外延性原理：$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$且$B\subseteq A$

例：证明$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$

证：$\forall x\in C-(A\cap B)$，有$x\in C$且$x\notin A\cap B$

$\therefore$有$x\in C$，$x\notin A$ 或 $x\in C$，$x\notin B$. 即$x\in C-A$或$x\in C-B$

$\therefore C-(A\cap B)\subset(C-A)\cup(C-B)$（后略）

5. De Morgan公式：$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

6.有理数性质

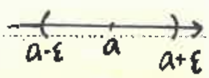
定理1（可列性）Q可数，可与N之间建立一一对应关系.

可数多个可列集的并集仍可数

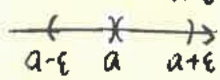
定理2（稠密性）任何两个不同实数之间均存在有理数

定理3 任何实数可用某一有理数列逼近. 即$\forall a\in R$，$\exists\{q_n\}$（$q_n\in Q$，$n=1,2,\cdots$）使$\lim_{n\to\infty}q_n=a$

7.邻域 $U(a,\varepsilon)$



去心邻域 $\mathring{U}(a,\varepsilon)$



有限集

无限集 { 可列集（可数集） } 至多可数集

不可列集

§2 映射与函数

1. 单射：若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$

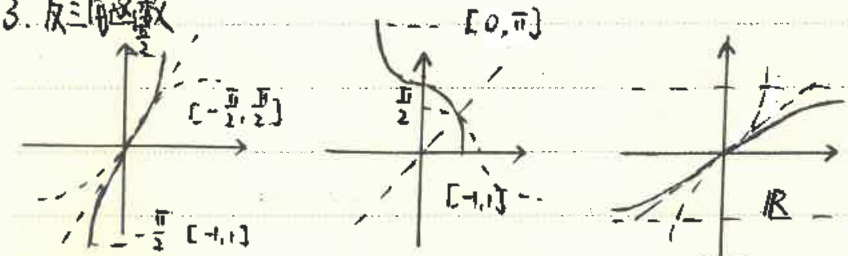
   满射：$R_f=Y$

2. 反函数：f 为单满映射　　$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 为同一图像

   例 $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 求 $f^{-1}(x)$

   $y^3=2x-3y \Leftrightarrow x=\frac{3y+y^3}{2}$　　$\therefore f^{-1}(x)=\frac{3x+x^3}{2}$

3. 反三角函数



$y=\arcsin x$　　$y=\arccos x$　　$y=\arctan x$

arc 主值 ⇔ Arc

由图：(1) $\sin x<x<\arcsin x$　　$x\in(0,1)$

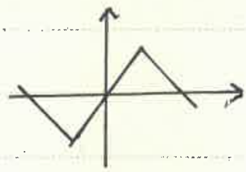
(2) $\arctan x<x<\tan x$　　$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

性质：(1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$　$|x|\le 1$　　(2) $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$

(3) $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$　　$x>0$

(4) $\sin(\arcsin x)=x$　(定义)

$\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}, \\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi. \end{cases}$



解：$\sin x$, $\arcsin x$ 为奇 $\Rightarrow$ $\arcsin(\sin x)$ 为奇 $\Big\}\Rightarrow$ 考虑半个周期 $[0,\pi]$

$\sin x$　$T=2\pi$

当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时，原式 $=x$　　当 $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$ 时，$\pi-x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

变式：证明 $y=\sin x^2$ 不为周期函数

建立映射：简单→复杂

$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$　　$f(x)=\tan x$

$\uparrow$

$(-1,1)\to\mathbb{R}$

$\uparrow$

$[-1,1]\to\mathbb{R}$　　-1　1　$\frac{1}{2}$ … $\pi-2$

f为周期函数 ⇒ $f(x)=0$ 零点均匀分布.

令$y=0$ $x=\sqrt{n\pi}$

结论: 若f为周期函数, 则$g(f(x))$为周期函数, $f(g(x))$不一定.

4. 复合函数: 定义域值域交起来不空

5. 初等函数: 常、幂、指$^{\times 2}$、对$^{\times 2}$、正弦余弦、正切余切、正割 ($y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$), 余割 ($y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$), 反正弦、反余弦、反正切、反余切 共16种

注: 无 arcsec、arccsc

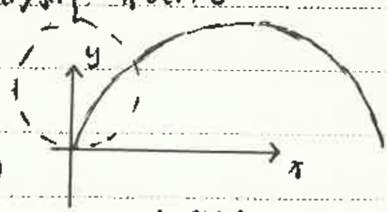
6. 分段函数: 同一函数 (初等函数含有分段函数, 如 $f(x)=\sqrt{(\ \ )^2}+\sqrt{(\ \ )^2}=|\ \ |+|\ \ |$)

幂指函数: 指数下放 $x^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln x}$ $(x>0)$

7. 研究对象: 初等函数、分段函数、幂指函数、隐函数、参数方程、变上限函数.

$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 能表达为$y(x)$的条件: $x'(t)\neq 0$

外摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$



8. 特殊函数: (1) 符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ (2) Dirichlet函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$

(3) Riemann函数: $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q},\ p,q\in N^+,\ (p,q)=1,\\ 0, & (x=0,1,\text{或}(0,1)\text{内无理数})\end{cases}$

例: 仅一点可导的函数: $x^2D(x)$.

9. 函数性态: (1) 周期性: ①很所有周期函数都有最小正周期 (如$D(x)$) ②周期函数之和为周期函数 要求 T_1, T_2 具有可比性 ($\frac{T_1}{T_2}\in Q$)

(2) 奇偶性: ①定义域为关于原点对称的数集 ②积分前验证奇偶性

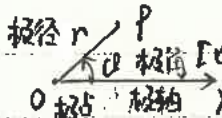
(3) 有界性: 有界 $\exists M>0$, 对$\forall x\in D$, 有 $|f(x)|\le M$

无界 对$\forall M>0$, $\exists x\in D$, 有 $f(x)>M$

$A\le f(x)\le B \Leftrightarrow |f(x)|\le M$

(4)单调性：对∀$x_1,x_2\in D$，有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\ge 0$

10. 极坐标　例：$r=\sec\theta \Leftrightarrow r\cos\theta=1 \Leftrightarrow x=1$



$[0,2\pi)\ /\ [-\pi,\pi)$　$\begin{cases} r=r_0 & 圆\\ \theta=\theta_0 & 射线\end{cases}$

例：阿基米德螺线 $\begin{cases} r=vt\\ \theta=\omega t\end{cases} \Rightarrow r=\frac{v}{\omega}t=at$

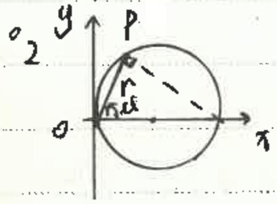
$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0,\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & x<0\end{cases}\end{cases}$

直角坐标→极坐标：1°方程代入法 2°几何轨迹法

例：$(x-a)^2+y^2=a^2\ (a>0) \Leftrightarrow x^2+y^2=2ax$

1° $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　$r^2=2ar\cos\theta \Leftrightarrow r=2a\cos\theta$

2°



$r=2a\cos\theta$

$x^2+(y-b)^2=b^2\ (b>0) \Leftrightarrow r=2b\sin\theta \quad \theta\in[0,\pi]$

心形线 $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0,\ 0\le\theta\le2\pi)$

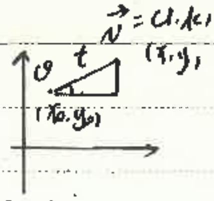
$r^2=ar(1+\cos\theta)\Leftrightarrow x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$

双纽线 $r^2=a\cos2\theta \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$

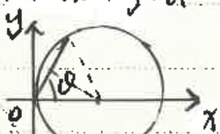
极角取值：$r^2>0 \Leftrightarrow \theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 第一象限

阿基米德螺线 $r=a+b\theta$

11. 参数方程 直线 $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\theta \\ y = y_0 + t\sin\theta \end{cases}$



圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ θ为圆心角 $\begin{cases} x = a+a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$



θ为极角 $\begin{cases} x = 2a\cos^2\theta \\ y = 2a\cos\theta\sin\theta \end{cases}$ $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

星形线: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$

$\Leftrightarrow (\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{a})^{\frac{2}{3}}=1 \Leftrightarrow [(\frac{x}{a})^{\frac{1}{3}}]^2+[(\frac{y}{a})^{\frac{1}{3}}]^2=1$

$\therefore \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

12. 三角公式: (1) $\sin^2x+\cos^2x=1$, $\tan^2x+1=\sec^2x$, $\cot^2x+1=\csc^2x$

($\tan x$, $\sec x$ 配对, $\cot x$, $\csc x$ 配对)

$(\tan x)'=\sec^2x$ $(\sec x)'=\sec x\tan x$ (正+余-)

$(\cot x)'=-\csc^2x$ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(2) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

(3) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

(4) $\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ $\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

13. 常见不等式: (1) 三角不等式 $||a|-|b||\le|a+b|\le|a|+|b|$

(2) 均值不等式 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

(3) Cauchy不等式: $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

§1 确界原理

1. 实数的连续性　(1) 运算的封闭　$S(\neq\phi)\subseteq\mathbb{R}$. $\forall a,b\in S$, $a\circ b\in S$

(2) 数域　$S\subseteq\mathbb{R}$，S中至少含有两个不同实数，若S中任何两数和差积商仍在S中，则称S为数域

例：$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 为数域

结论：任何数域都含0和1，$\mathbb{Q}$是最小的数域

(3) 有理数的稠密性　$\forall p,q\in\mathbb{Q}$，$\exists x_0$ (如 $\frac{p+q}{2}$) 满足 $p<x_0<q$.

实数具有稠密性

2. 数集的有界　S是有界数集 $\Leftrightarrow \exists A,B\in\mathbb{R}$. $\forall x\in S$ 有 $A\le x\le B$ $\Leftrightarrow \exists M>0$. $\forall x\in S$ 有 $|x|\le M$

例：$\min S=a \Leftrightarrow a\in S$ 且 $\forall x\in S$, $a\le x$.

3. 上确界与下确界：$M=\sup S \Leftrightarrow \forall x\in S$, $x\le M$ 且 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x'\in S$ 有 $x'>M-\varepsilon$

(最小上界：上界且最小)　(趋近小量)

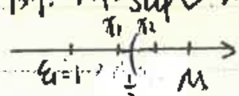
$m=\inf S$ (最大下界)

例：$S=(0,1]$, $\sup S=1=\max S$　$\inf S=0$, $\min S$ 不存在

一个有界数集，max/min 未必存在，但 sup, inf 一定存在

($\nearrow$: 满足条件)

例：$M=\sup S$, $M\notin S \Rightarrow$ 1. $\max S$ 不存在　2. $\exists\{x_n\}\nearrow$, $x_n\to M$ ($\varepsilon_n=\min\{\frac{1}{n}, M-x_{n-1}\}$)



对 $\forall x\in S$, $M>x$　　$M-\frac{1}{n}<x_n<M$

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in S$ 使 $x_0>M-\varepsilon$

4. 确界原理：非空有界实数集必有上下确界

注：在$\mathbb{Q}$不成立 如 $3.1, 3.14, 3.141, \cdots$, $\pi\notin\mathbb{Q}$　$(1+\frac{1}{n})^n\to e\notin\mathbb{Q}$

$x=n_0.n_1n_2\cdots n_k\cdots$　$x_k=n_0.n_1\cdots n_k$ 不足近似　$\bar{x}_k=n_0.n_1\cdots n_k+\frac{1}{10^k}$ 过剩近似

$x_k\le x<\bar{x}_k$　　$y>x \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}$, 有 $y\ge n_0.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k}$

(A) $\forall x \in S$，有 $x < n_0.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}$

(B) $\exists x_0 \in S$，$x_0 \geq n_0.n_1n_2\cdots n_k$

$\sup(-S) = -\inf S$ 不妨设 S 中为非负数 构造 $\alpha = n_0.n_1n_2\cdots n_k\cdots$

满足对每位：(1) $\forall x \in S$，$x < n_0+1$，(2) $\exists x_0 \in S$，$x_0 \geq n_0$ 再将 $[n_0, n_0+1)$ 分为10等分。

$n_1 \quad n_1+\frac{1}{10}$

$n_0 \quad 10^{-1} \quad n_0+1$

证 α 为 $\sup S$，即要证 (1) 对 $\forall x \in S$，$\alpha > x$：反证 $\exists \bar{x} > \alpha = n_0.n_1\cdots n_k\cdots$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$，$\bar{x} > n_0.n_1\cdots n_k + \frac{1}{10^k}$ 矛盾。

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\alpha - \varepsilon < x_0 \in S$：$\alpha - \varepsilon < \alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$，有 $n_0.n_1\cdots n_k > \alpha - \varepsilon$

又 $x_k > n_0.n_1\cdots n_k$ $\therefore \exists x_k > \alpha - \varepsilon$

性质：1. 上下确界唯一。

证明：设 $M = \sup S$，若 $\sup S$ 不唯一，设 M' 也为 $\sup S$。

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in S$ 有 $x_0 > M - \varepsilon$ $\Rightarrow x_0 \leq M'$ $\therefore M' > M - \varepsilon \Rightarrow M \leq M'$

同理 $M' \leq M$ $\therefore M' = M$

例：对 $\forall \varepsilon > 0$，$|a-b| < \varepsilon \Rightarrow a = b$

反证：若 $a \neq b \Rightarrow |a-b| > 0$ 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b| \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$ 矛盾 $\therefore a = b$

2. $M = \sup S$，$M \notin S \Rightarrow \exists x_n \in S$ 使 $|x_n - M| < \frac{1}{10^n}$

构造 $\varepsilon_n = \min\{10^{-n}, M - x_{n-1}\}$

结论：$S (\neq \emptyset)$，$\sup S \notin S \Rightarrow S$ 为无限集

例：证明 $S = \{x \mid x \leq 0$ 或 $x^2 < 2, x > 0\}$ 不存在上确界 $M \in \mathbb{Q}$。

1. $\sup S = M \in \mathbb{Q} \Rightarrow M^2 \neq 2$

2. 如果 $M^2 < 2$，只要构造 $(M + \frac{1}{n})^2 < 2$ $(M + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q})$ （不是上界）

$\Leftrightarrow \frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - M^2 \xrightarrow{\frac{1}{n^2} \to \frac{1}{n}} \frac{2M+1}{n} < 2 - M^2 \Rightarrow n > \frac{2M+1}{2-M^2}$

3. 如果 $M^2 > 2$，只要构造 $(M - \frac{1}{n})^2 > 2$ （不是最小上界）

$\Leftrightarrow \frac{2M}{n} - \frac{1}{n^2} < M^2 - 2 \xrightarrow{-\frac{1}{n^2} \to 0} \frac{2M}{n} < M^2 - 2 \Rightarrow n > \frac{2M}{M^2-2}$

§2 数列极限

1. 数列极限定义：数列 $\{a_n\}$ $a_n=f(n)$ $f: Z^+ \to IR$ 整标函数

例：$a_{n+1}=f(a_n)$ ① $f\uparrow$，$a_1<a_2 \Rightarrow \{a_n\}\uparrow$

② $f\downarrow$ $a_1<a_3 \Rightarrow$ 奇↑偶↓

证明：$a_1<a_3 \Rightarrow f(a_1)>f(a_3)$

$\Leftrightarrow a_2>a_4 \Rightarrow f(a_2)<f(a_4) \Leftrightarrow a_3<a_5$

定义：对 $\{a_n\}$，若 $\exists$ 常数 $a\in IR$，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，则称 $\{a_n\}$ 收敛，且当 $n\to+\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a。

$\varepsilon-N$ 语言

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 有 $|a_n-a|<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq a \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$，对 $\forall N>0$，$\exists n_0>N$ 有 $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$

$a_n\ (n>N)$ $a_1\cdots N$

$a-\varepsilon$ a $a+\varepsilon$

无限项落在里面 有限项落在外面

几何意义：定理：$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当对 a 的 $\forall \varepsilon$ 邻域 $U(a,\varepsilon)$，除有限项外，$\{a_n\}$ 中其它项均在 $U(a,\varepsilon)$

证明：(1) 必要性：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$|a_n-a|<\varepsilon$

∴落在 $U(a,\varepsilon)$ 外的项最多只有 $a_1,a_2,\ldots a_N$，其余均在 $U(a,\varepsilon)$ 内。

充分性：对 a 的 $\forall U(a,\varepsilon)$，只有有限项 $a_{n_1}, a_{n_2},\cdots a_{n_k}$ 不在 $U(a,\varepsilon)$ 内，取 $N=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}+1$，

则当 $n>N$ 时，a_n 均在 $U(a,\varepsilon)$ 内，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$。

例1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}$

$a_1,a_2,\cdots a_n\neq\{a_n|n\in N\}$
(可列集)

$|a_n-\frac{1}{2}| = |\frac{n-1}{2n}-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2n} < \varepsilon$ $\quad \therefore \exists N=[\frac{1}{2\varepsilon}]$

放缩法：$|a_n-a| = \frac{n+100}{n^2+2n+3} < \frac{2}{n} < \varepsilon$ $\quad N=\max\{10^2, [\frac{2}{\varepsilon}]\}$

比较最高次项　　给定满足条件大数

注：确能将 n 约去，否则 $c<\varepsilon$ 放过。

例2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>1)$

法一 $|\sqrt[n]{a}-1| = \sqrt[n]{a}-1 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \varepsilon+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \log_a(\varepsilon+1) \Leftrightarrow n > \frac{1}{\log_a(\varepsilon+1)}$

法二 $\sqrt[n]{a}-1 = y_n \Leftrightarrow a=(1+y_n)^n > 1+ny_n$ 伯努利不等式

$\therefore N=[\frac{a-1}{\varepsilon}]$　　误差估计法

变式：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

令 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n$ $\quad \therefore n=(1+\alpha_n)^n > 1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$

$> 1+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$

1. 只放一次不影响
2. 省略一次便于计算

$\therefore N=[\frac{2}{\varepsilon^2}]$

另解：$\sqrt[n]{n} = (\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdots)^{\frac{1}{n}} < \frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$

注：$2^n=(1+1)^n = C_n^0+\cdots+C_n^n > C_n^k$

$(1+\alpha)^n = \alpha^n C_n^n + \alpha^{n-1}C_n^{1}+\cdots > C_n^k\alpha^k$

例3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$

$\to$ 放为三次项。

$2^n=(1+1)^n > C_n^3$

$\therefore \frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{C_n^3} = \frac{6n}{(n-1)(n-2)} < \frac{8}{n} < \varepsilon$ $\quad N=\max\{100, [\frac{8}{\varepsilon}]\}$

比最高次项

变：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1, k\in N^*)$ $\quad a^n > C_n^3\alpha^3$

证：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|a|$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |a_n-a|<\varepsilon.$

又 $||a_n|-|a|| \le |a_n-a| < \varepsilon$

$a_n \to a \Leftrightarrow \begin{cases} a_{2n} \to a \\ a_{2n-1} \to a \end{cases}$

例4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \ (a_n \geq 0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \dfrac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \cancel{\leq \dfrac{1}{\sqrt{a}}} \varepsilon$ 讨论 $a=0$, $a\neq 0$

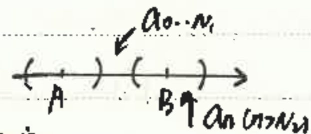
当 $a=0$ 时 $|a-0|<\varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{a_n}-0|<\varepsilon$

注: $x^n-1 = (x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)$ $\quad a^n-b^n = b^n[(\frac{a}{b})^n-1]$

$n^{\frac{1}{3}}-1 = \dfrac{n-1}{n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}+1}$

2. 收敛数列的性质

(1) (唯一性) 如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则其极限唯一.



证明: 法一 (反证法) 如果 $\{a_n\}$ 收敛, 但极限不唯一.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, 且 $a<b$

取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists N_1>0, \forall n>N_1, |a_n-a|<\varepsilon \Rightarrow a_n < \dfrac{a+b}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow \exists N_2>0, \forall n>N_2, |a_n-b|<\varepsilon \Rightarrow a_n > \dfrac{a+b}{2}$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时上面两式均成立 $\therefore$ 矛盾

$\therefore \{a_n\}$ 收敛时, 极限唯一.

法二. $\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists N>0$ 当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$, $|a_n-b|<\varepsilon$.

$\therefore |b-a| \leq \underline{|b-a_n|} + \overset{\text{对应以上}}{\underline{|a_n-a|}} < 2\varepsilon \quad \therefore a=b$

(2) (有界性) 如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

证明: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ 对 $\varepsilon_0=1$, $\exists N>0$, $\forall n>N$, $|a_n-a|<\varepsilon_0=1$

$\therefore \forall n>N.\ |a_n| \le |a_n-a|+|a|<|a|+1$

取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a|+1\}$. $\forall n\in\mathbb{N}$. 均有$|a_n|\le M$ $\therefore \{a_n\}$有界

结论：收敛数列必有界. 有界数列不一定收敛 ($a_n=(-1)^n$)

有界数列一定存在收敛的子数列 (Weierstrass 致密性定理)

(3) (保号性) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a>0 \Rightarrow \forall \alpha\in(0,a).\ \exists N>0.\ \forall n>N.\ a_n>\alpha>0.$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a>0$. 对 $\varepsilon=a-\alpha>0$. $\exists N>0$.

$\forall n>N.\ |a_n-\alpha|<\varepsilon \Rightarrow a_n>a-\varepsilon=\alpha$

$\therefore \forall \alpha\in(0,a).\ \exists N>0.\ \forall n>N.\ a_n>a.$

应用：1. 取$\alpha=\frac{1}{2}a$. $\frac{1}{2}a$等特定常数

2. $a_n>0 \nRightarrow \{\frac{1}{a_n}\}$有界，$a_n>\alpha>0$. $\frac{1}{a_n}<\frac{1}{\alpha} \Rightarrow \{\frac{1}{a_n}\}$有界 (无界→有界, 有限项)

($a_n\ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n\ge 0$，$\Leftarrow$ ($a_n\ge b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} b_n$)

同理. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a<0 \Rightarrow \forall A\in(a,0).\ \exists N>0.\ \forall n>N.\ a_n<A.$

$\forall n>n_0\in\mathbb{N}.\ a_n\ge 0.\ \{a_n\}\to a \Rightarrow a\ge 0$

$\forall n>n_0\in\mathbb{N}.\ a_n>0.\ \{a_n\}\to a \nRightarrow a_n>0$ (如 $a_n=\frac{1}{n}$).

3. 数列极限的四则运算法则. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$ $(A,B\in\mathbb{R})$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a\circ b)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \circ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A\circ B$ ($\circ$表示$+/-/\times/\div$.

规则：(1) 极限需存在 (2) 仅有限次四则运算 (3) 分母$B\ne 0$ 　　$\circ$表示$\div$时$B\ne0$)

($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} \ne \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n}$) ($\ne \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}$)

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$ $\therefore \forall\varepsilon>0.\ \exists N_1>0.\ \forall n>N_1$

$|a_n-A|<\varepsilon.\ |b_n-B|<\varepsilon.$

$\therefore \left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{Ba_n-Ab_n}{Bb_n}\right| \overset{\text{建立联系}}{=} \left|\frac{B(a_n-A)+A(B-b_n)}{Bb_n}\right| \le \frac{|B||a_n-A|+|A||B-b_n|}{|B||b_n|}$

$< \frac{A+B}{|B||b_n|}\varepsilon$

又 $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$ $\therefore \lim_{n\to\infty} |b_n| = |B| > 0$ $\therefore \exists N_2 > 0, \forall n > N_2, |b_n| > \frac{1}{2}|B|$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\{N_1, N_2\}, \forall n > N, \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < \frac{|A|+|B|}{|B||b_n|}\varepsilon < \frac{2(|A|+|B|)}{B^2}\varepsilon$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

例1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \underline{1}$.

(1) 当 $a=1$ 时 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. (2) 当 $a>1$ 时 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (3) 当 $0<a<1$ 时 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$

例2. $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}} - 1) = \underline{1}$.

令 $\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}} = a_n$. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

证明: $|a_n - 1| = \frac{a_n^3 - 1}{a_n^2 + a_n + 1} < \frac{1}{n}$ (分子有理化)

$\therefore$ 原式 $= \lim_{n\to\infty} n \frac{a_n^3-1}{a_n^2+a_n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{a_n^2+a_n+1} = 1$

例3. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{3n^2-2n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}} = \frac{1}{3}$

变式: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{3n^2-2n+10}$ 不存在.

证明极限不存在: 倒数极限为0.

例4. (Cauchy公式) 假设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$.

化0法: 将等号右侧化为0, 便于计算.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, \forall n > N_1, |a_n - a| < \varepsilon$

$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$

分配所有项 $\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n} + \frac{(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$ 符合条件的无限项

$\leq \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right| + \left|\frac{(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$ 常量

$\exists N > 0, \forall n > N$, 有 $\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right| < \varepsilon$.

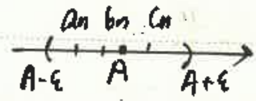
而 $\left|\frac{(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right| \leq \frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n} \leq \frac{n-N_1}{n}\varepsilon < \varepsilon$ 联系

$\therefore \left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<2\varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

变式：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$

4.夹逼定理：对 $\{a_n\}$. $\{b_n\}$. $\{c_n\}$ $\forall n\geq n_0\in\mathbb{Z}^+$. $a_n\leq b_n\leq c_n$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.



证明：$\because \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$.

$\therefore \forall\varepsilon>0$. $\exists N>n_0$. $\forall n>N$. $|a_n-A|<\varepsilon$. $|c_n-A|<\varepsilon$

$\Rightarrow A-\varepsilon<a_n$, $c_n<A+\varepsilon$

又 $a_n\leq b_n\leq c_n$ $\therefore \forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ $\forall n>N$. $A-\varepsilon<a_n\leq b_n\leq c_n<A+\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

例1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=$ __1__

累加/累乘处理. $1\leq\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leq n$.

变式1：$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=$ __1__

$1\leq(n!)^{\frac{1}{n^2}}\leq(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=\sqrt[n]{n}$

变式2：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{\sqrt{n^6+1^2}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2^2}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)=$ __$\frac{1}{3}$__.

记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2}{\sqrt{n^6+i^2}}$

分式求和,统一分母　　注：$\sum i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$S_n<\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+1^2}}<\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$　　$S_n>\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\dfrac{1}{3}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}}=\dfrac{1}{3}$ (上下同阶,四则运算)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{3}$.

注：夹逼定理非万能. 若 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2}{\sqrt{n^6+i^6}}$ 需化为积分

例2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-n\right)=$ __$\frac{1}{4}$__.

放入Σ整体处理. $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$

$a_k=\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{k}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}$ (有理化)

统一分母: $\frac{k}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\le a_k\le\frac{1}{2}\frac{k}{n^2}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\frac{n(n+1)}{2n^2}\le S_n\le\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2n^2}$

即 $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\frac{n+1}{2n}\le S_n\le\frac{n+1}{4n}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n}=\frac{1}{4}$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$

例3. $a_i>0$ $(i=1\cdots k)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_k^n}$.

先猜后证: 当 $n=2$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$

证明: $3^n\le 2^n+3^n\le 2\times3^n$

证明: 记 $\max\{a_k\}=M$. $M^n\le a_1^n+\cdots+a_k^n\le kM^n$

$\therefore M\le\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_k^n}\le M\sqrt[n]{k}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,\cdots,a_k\}$.

例4. 若 $\{a_n\}$ 满足 $\forall n\in N^+$, $p\in N^+$, 均有 $|a_{n+p}-a_n|<\frac{p}{n}$. $\{a_n\}$ 是否为 Cauchy 数列?

不是 ($N=N(\varepsilon)=N(p)$ ×)　例如 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ $\{a_n\}$ 发散.

而 $|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n}$

§3 无穷大量

1. 无穷大量与无穷小量 定义：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则 $\{a_n\}$ 为 $n\to\infty$ 时的无穷小量。

注：1. 无穷小量是变量 2. $a_n=0$ 也为无穷小量

对 $\forall G>0$，$\exists N>0$，$\underline{\forall n>N}$，$|a_n|>G$，则 $\{a_n\}$ 为 $n\to+\infty$ 时的

无穷大量，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ （$+\infty$ ($a_n>G$)，$-\infty$ ($a_n<-G$)）

如：$\forall G>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$a_n>G$，则 $\{a_n\}$ 为 $n\to+\infty$ 时的

正无穷大量，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$

无界与无穷大量的区别：1. 无穷大量：对 $\forall G>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$|a_n|>G$。

2. 无界：对 $\forall G>0$，$\exists n_0\in N$，$|a_n|>G$。

联系：无穷大量 $\Rightarrow$ 无界　无界子列为无穷大量。

证明：$\because$ $\{a_n\}$ 无界 $\therefore$ $\forall G>0$，$\exists n_0\in N$，$|a_{n_0}|\ge G$。

取 $G_1=1$，$\exists n_1\in N$，$|a_{n_1}|>G_1=1$

取 $G_2=\max\{2,|a_{n_1}|+1\}$，$\exists n_2(>n_1)\in N$，$|a_{n_2}|>G_2$

依次可得 取 $G_k=\max\{\underset{=}{k},\overline{|a_{n_{k-1}}|+1}\}$（确保↗）$\exists n_k(n_k>n_{k-1})\in N$，使 $|a_{n_k}|>G_k$

$\{a_{n_k}\}$ 满足 $|a_{n_k}|>G_k\ge k$，$\therefore$ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=\infty$

注：无穷级数不满足交换律（条件收敛）

例：$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

$\frac{1}{2}\ln 2=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+\cdots$

$\therefore$ $\frac{3}{2}\ln 2=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$

例1：$|q|<1\Rightarrow q^n$ 为无穷小量　$|q|>1\Rightarrow q^n$ 为无穷大量

例2：证明 $a_n=\frac{n^2-2}{n+1}$ 为无穷大量

$a_n=\frac{n^2-2}{n+1}\ \cancel{>}\ \frac{n}{2}=G$　$\therefore$ $\forall G>0$，$\exists N=\max\{4,2G\}$，$\forall n>N$，$\frac{n^2-2}{n+1}>\frac{n}{2}>G$.

2. 无穷大量与无穷小量的关系. 无穷大量的性质: (1) $a_n\neq 0$. $\{a_n\}$是无穷大量 $\Leftrightarrow$ $\{\frac{1}{a_n}\}$为无穷小量

(2) a_n, b_n为无穷大量 $\Rightarrow$ a_nb_n为无穷大量

推论: $a_n\geq\alpha>0$, b_n为无穷大量 $\Rightarrow$ a_nb_n为无穷大量

3. 极限的计算 1. 肯定型 $\frac{c_2}{c_1}$ $(c_1\neq 0)$ 2. 不定型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty\cdot 0, \infty-\infty; 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$.

1^{∞}型极限的计算: 利用 $(1+\frac{1}{n})^n\to e$ 互为倒数 $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\{[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\}^{f(x)g(x)}$

记 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=A$ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{g(x)}=e^{A}$

例1: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n+2}{3n+5})^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{-3}{3n+5})^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\frac{-3}{3n+5})^{\frac{3n+5}{-3}}\right]^{\frac{-6n+3}{3n+5}} = e^{-2}$

例2: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)^n$

$\sqrt{n^2+2n}-n\to 1$ 不明显, 先有理化: $\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)^n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2+2n}+n}+1)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\frac{-2n}{(\sqrt{n^2+2n}+n)^2})^{\frac{(\sqrt{n^2+2n}+n)^2}{-2n}}\right]^{\frac{-2n^2}{(\sqrt{n^2+2n}+n)^2}}$

再有理化

$=e^{-\frac{1}{2}}$

靠近n, 与n比较

例3: $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin\pi(\sqrt{n^2+n})| = \lim\limits_{n\to\infty}|\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n)| = \lim\limits_{n\to\infty}|\sin\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}| = 1$

4. Stolz定理: ($\frac{0}{0}$型) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$, 且$\{a_n\}$严格单调递减(递增). 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=A$. (假设 $a_n\neq 0$)

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=A$. ($A\in\mathbb{R}$或$\pm\infty$)

当$A\in\mathbb{R}$时: 对$\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. $\forall n>N$. $\left|\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}-A\right|<\varepsilon$

改变结构 引入无穷小量 裂项结构

$\because\forall n\in N$. $a_n>a_{n+1}$ $\therefore (A-\varepsilon)(a_n-a_{n+1})<b_n-b_{n+1}<(A+\varepsilon)(a_n-a_{n+1})$

$\forall m>n$. 从n累加至$m-1$ $\Rightarrow (A-\varepsilon)(a_n-a_m)<b_n-b_m<(A+\varepsilon)(a_n-a_m)$

$\Rightarrow A-\varepsilon<\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}<A+\varepsilon$ 令$m\to\infty$ $A-\varepsilon\leq\frac{b_n}{a_n}\leq A+\varepsilon$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=A$

例1. (Cauchy公式) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ ($\frac{*}{\infty}$型)

由Stolz定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)-n}=a$.

例2. $a_1=\sin x$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$, $a_{n+1}=\sin a_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 证明: $n\to+\infty$时 $a_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}$.

$0<a_n<\frac{\pi}{2}$ $a_{n+1}=\sin a_n<a_n$ $\therefore\{a_n\}\downarrow$有界 $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

要证 $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ 只需证 $a_n^2 \sim \frac{3}{n}$

分母下数，放约了满格

$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}} = 3$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}}\, a_n = 1 \Rightarrow a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$

例3. $a_1>0$. $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ $(n\in N^+)$. 证明 $a_n \sim \sqrt{2n}$ $(n\to+\infty)$

证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ 则 $a = a+\frac{1}{a}$ 矛盾 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

由Stolz定理 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2(n+1)-2n} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{a_n^2}\right) = 1$ $\therefore a_n \sim \sqrt{2n}$

($\frac{*}{\infty}$型) 设 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的无穷大量，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = A$ (A有限或$\pm\infty$).

(不需 $*\to\infty$) 证：当A为有限数时，对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. $\forall n>N$. $\left|\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}-A\right|<\varepsilon$.

$\because \forall n\in N$ $a_n<a_{n+1}$ $\therefore (A-\varepsilon)(a_{n+1}-a_n) < b_{n+1}-b_n < (A+\varepsilon)(a_{n+1}-a_n)$ 二分法.

以$N+1$累加至$n+1$得 $(A-\varepsilon)(a_{n+1}-a_{N+1}) < \underbrace{b_{n+1}}_{\to\text{无限}} - \underbrace{b_{N+1}}_{\to\text{有限}} < (A+\varepsilon)(a_{n+1}-a_{N+1})$

从而 $(A-\varepsilon)\left(1-\frac{a_{N+1}}{a_{n+1}}\right)+\frac{b_{N+1}}{a_{n+1}} < \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} < (A+\varepsilon)\left(1-\frac{a_{N+1}}{a_{n+1}}\right)+\frac{b_{N+1}}{a_{n+1}}$

$\therefore -\varepsilon-\frac{a_{N+1}}{a_{n+1}}(A-\varepsilon)+\frac{b_{N+1}}{a_{n+1}} < \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}-A < \varepsilon-\frac{a_{N+1}}{a_{n+1}}(A+\varepsilon)+\frac{b_{N+1}}{a_{n+1}}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ $\therefore$ n充分大时 $\left|\frac{a_{N+1}}{a_{n+1}}\right|<\varepsilon$. $\left|\frac{b_{N+1}}{a_{n+1}}\right|<\varepsilon$

$\therefore \left|\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}-A\right| < (|A|+3)\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=A$.

例4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n}{n}$.

平移法：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$. 下证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n}{n}=0$.

$\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 有界. $\exists A.B>0$ s.t. $|a_n|\le A$. $|b_n|\le B$ $\therefore \forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. $\forall n>N$. $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2B}$.

$\left|\frac{a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n}{n}\right| \overset{\text{二分}}{\le} \left|\frac{a_nb_1+\cdots+a_{N+1}b_{n-N}}{n}\right| + \left|\frac{a_Nb_{n-N+1}+\cdots+a_1b_n}{n}\right|$

$< \frac{n-N}{n}B\frac{\varepsilon}{2B}+\frac{N}{n}AB < \varepsilon$ (n充分大. $\frac{N}{n}AB<\frac{\varepsilon}{2}$).

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\ne 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$. 令 $a_n = a_n - a \to 0$ ← 平移

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(a_nb_1+\cdots+a_1b_n)+a(b_1+\cdots+b_n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(b_1+\cdots+b_n)}{n}$

$\xlongequal{\text{Cauchy公式}} ab$

例5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$.

a前系数：权重. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)^2-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{2n+1}=\dfrac{A}{2}$ (用Stolz)

例6. $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a$.

乘积：取对数. 令 $y_n=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$ 由Cauchy公式知.

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a$.

例7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=a\ (b_n>0)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a$.

令 $a_1=b_1$. $a_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\ (n\geq 2)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=a$.

若 $a=0$. $\forall n>N$. $0<b_{n+1}<\varepsilon b_n<\cdots<\varepsilon^{n-N}b_{N+1}$

$\Rightarrow 0<\sqrt[n+1]{b_{n+1}}<\boxed{\sqrt[n+1]{\dfrac{b_{N+1}}{\varepsilon^{N+1}}}}\ \varepsilon$ $\quad\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_n}=0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}C^{\frac{1}{n+1}}=1$.

若 $a\neq 0$. 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_1\dfrac{b_2}{b_1}\cdots\dfrac{b_n}{b_{n-1}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

例8. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

法一. $\dfrac{n^n}{n!}\ \xrightarrow[\text{构造}]{\text{相邻抵消}}\ \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

令 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2}{1}\,\dfrac{3^2}{2^2}\cdots\dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\,\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}}$

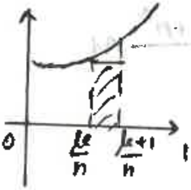
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\,\dfrac{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}{n}\overset{\text{例6}}{=\!=}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$

法二 令 $a_n=\frac{n^n}{n!}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}\xlongequal{例16}e$

法三 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\int_0^1\ln x\,dx=-1$

乘积：取ln　　　黎曼和　　　定积分



$$\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{底}\underbrace{f(\frac{k}{n})}_{高}$$

例9. $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}\right)$

$a_n>0$，$\{a_n\}\nearrow$ 若$\{a_n\}$有界，则$\{a_n\}$收敛，记 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\geq 3$.

则 $a=a^2+a\Rightarrow a=0$ 矛盾. $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

取倒数 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}\Rightarrow\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_1+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\underbrace{\frac{1}{a_{n+1}}}_{\to 0}\right)=\frac{1}{3}$

例10. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\overbrace{C_n^k}^{权值}a_k=A$.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ |a_n-A|<\varepsilon$

$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k$

$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^ka_k-A\right|=\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(a_k-A)\right|\leq\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}|C_n^k(a_k-A)|$

$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}|C_n^k(a_k-A)| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}|C_n^k(a_k-A)|$ 二分

$\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}|C_n^k(a_k-A)| \le \underbrace{\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k}_{<1}\varepsilon < \varepsilon$

令 $M=\max\limits_{0\le k\le N}|a_k-A|$;

$C_n^k<n^k \Rightarrow \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}|C_n^k(a_k-A)| < \frac{1+n+n^2+\cdots+n^N}{2^n}M$

$= \frac{M(n^{N+1}-1)}{2^n(n-1)} \to 0$

$\therefore \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k - A\right| < 2\varepsilon.$

例11. $\{a_n\}$满足 $\exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. s.t. $|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\le M$

则$\{a_n\}$为有界变差数列. 证明:有界变差数列一定收敛.

单调收敛+Cauchy: 记 $b_n=\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|$ $\{b_n\}\nearrow$. 有界 $\therefore\{b_n\}$收敛.

由Cauchy收敛准则知 $\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ \forall p\in\mathbb{N}$

s.t. $|b_{n+p}-b_n| = |a_{n+1}-a_n|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p+1}-a_{n+p}|<\varepsilon$

联系

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ \forall p\in\mathbb{N}$

s.t. $|a_{n+p}-a_n| = |(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+2}-a_{n+1})+\cdots+(a_{n+p+1}-a_{n+p})|$

$\le |a_{n+1}-a_n|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p+1}-a_{n+p}|$

$<\varepsilon$ 由Cauchy收敛准则知 $\{a_n\}$收敛.

例12. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$. $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\right)$

记 $x_n=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, $y_n=\frac{1}{n}$. $\{y_n\}\downarrow$. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

由Stolz公式 $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

变式: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n}\right)$

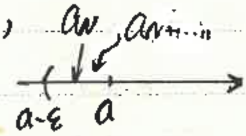
记 $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n}$ $\{x_n\}\downarrow\to 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$

由Stolz公式 $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)^2}}{-\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}=-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=-\frac{1}{2}$

证明收敛方法：1.定义 2.夹逼 3.单调收敛准则

§4 收敛准则

1.单调收敛准则：单调有界数列必收敛.（↑有上界 / ↓有下界）



证明：∵$\{a_n\}$有上界 ∴$A=\{a_n|n\in N^+\}$有上界

由确界原理，A有上确界，记$a=\sup A$.

∴$\forall n\in N^+$, $a_n\le a$.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists b\in A$, 使 $b>a-\varepsilon$.

∴$\exists N\in N^+$, $b=a_N$ 则 $a_N>a-\varepsilon$

又$\{a_n\}\uparrow$ ∴$\forall n>N$, $a-\varepsilon<a_n<a$

∴$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in N^+$, $\forall n>N$, $|a_n-a|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

例1. $a_1=4$, $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并计算.

递推数列证明：1.考虑数归 2.单调性证明可能依赖于有界性（a_n范围）.

法一. 先证$\{a_n\}$有下界3. 下用数归证明：

$a_1=4\ge 3$, $a_n\ge 3 \Rightarrow a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}\ge 3$ ∴$\forall n\in N^+$, $a_n\ge 3$

再证$\{a_n\}\downarrow$. 下用数归证明：

$a_2=\sqrt{10}<a_1$, $a_n<a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}<\sqrt{6+a_{n-1}}=a_n$ ∴$\{a_n\}\downarrow$

∴综上，$\{a_n\}$收敛. 记$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=x$ ∴$x=\sqrt{6+x} \Leftrightarrow x=3$ ∴$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$.

法二. ① $a_{n+1}-a_n=\sqrt{6+a_n}-\sqrt{6+a_{n-1}}$ 化同类结构 证单调性

$$=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}<0. \quad ② \ a_n\ge 0.$$

变式：$a_1=3$, $a_{n+1}=\sqrt{6-a_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$（分奇偶讨论）

2.相似结构

法三. "压缩映像"原理：$|a_{n+1}-3|=|\sqrt{6+a_n}-3|=\dfrac{|a_n-3|}{\sqrt{6+a_n}+3}\le\dfrac{1}{3}|a_n-3|$

1.求极限代入

$\le\cdots\le\dfrac{1}{3^n}|a_1-3|$

∴$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$

注：求解极限具体值可引入变量　$a_{n+1}=\sqrt{6-a_n}$　记 $\{a_{2n-1}\}\downarrow\to A$，$\{a_{2n}\}\downarrow\to B$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_{2n+1}=\sqrt{6-a_{2n}}\\a_{2n+2}=\sqrt{6-a_{2n+1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\sqrt{6-B}\\B=\sqrt{6-A}\end{cases}$$

例2. $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛.

法一. 先证单调性，即要证 $a_n<a_{n+1}$.

$a_n=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}$

$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$

(由 $C_n^k\frac{1}{n^k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$)

又 $a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$

$>a_n$　$\therefore\{a_n\}\uparrow$

再证有界性. 由上知 $a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

由 $n!>2^{n-1}$　$(1\times2\times\cdots\times n>2\times2\times\cdots\times2)$ 得

$a_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$.　$\therefore\{a_n\}$有界 且 $2\le a_n<3$　$\therefore$即证 $\{a_n\}$收敛.

法二. 均值不等式 (1) $a_n=(1+\frac{1}{n})^n\cdot1<(\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1})^{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=a_{n+1}$

(2) $(1+\frac{1}{n})^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}<(\frac{n(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2})^{n+2}=1\Rightarrow2\le a_n<4$ 添项操作

构造思路：约分为常数.　$\frac{n+1+ak}{n+k}$　$\therefore k=1+ak\Leftrightarrow(1-a)k=1$

记 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e=2.718281828\cdots$. $7<e^2<8$.　$e\approx\frac{271801}{99990}$

结论：设 $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ $\therefore\{b_n\}\downarrow$.　$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=e$.

证明：方利用均值不等式，直接运用会发现 $(n+1)(1+\frac{1}{n})$ 项无法约分.

故考虑 $\frac{1}{b_n}=(\frac{n}{n+1})^{n+1}\cdot1<(\frac{\frac{n}{n+1}(n+1)+1}{n+2})^{n+2}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}=\frac{1}{b_{n+1}}$

$\therefore\{b_n\}\downarrow$.

$\therefore 2 = a_1 \le a_n < b_n \le b_1 = 4$

推论：1. $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

2. $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

推论：累加得 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$

$\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1} < \ln(n+1)$

以 $n-1$ 代 n $\therefore \frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < \ln n \Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln n$

$\therefore \ln(1+n) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln n$

推论：$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$ 调和级数发散 ($\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$)

例3. 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，证明 $\{a_n\}$ 收敛

证明：$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0 \quad \therefore \{a_n\}\downarrow$

$a_n > \ln(n+1) - \ln n > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 有下界 $\quad \therefore \{a_n\}$ 收敛

记 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \gamma$ (Euler 常数 $\gamma = 0.5772\cdots$)

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \gamma + o(1)$

(注：证明调和级数发散的初等方法：$S_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n})$

$> 1+\frac{n}{2} \to +\infty$)

例4. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}) = \ln 2$

先证 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}$

令 $S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，$T_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

则 $\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n} = T_{2n}-T_n$ 奇数 偶数

而 $S_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}(S_{2n}+T_{2n}) - \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2}S_{2n}+\frac{1}{2}(T_{2n}-T_n)$

$\therefore S_{2n} = T_{2n}-T_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}$

再证 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}) = \ln 2$.

令$a_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}$. ① $\frac{1}{2}\le a_n<\frac{n}{n+1}<1$ ② $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}>0$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

法一: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\ln 2$

法二: 由前知 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\alpha_n$ ($\alpha_n\to 0$)

∴ $S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\ln(2n)+\gamma+\alpha_{2n}$ ($\alpha_{2n}\to 0$)

∴ $S_{2n}-S_n=\ln 2$ 即证.

例5. $\{u_n\}$有 $u_1>0$, $u_{n+1}=3+\frac{4}{u_n}$. 证明$\{u_n\}$收敛. 求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

法一: 压缩映像: $u_n>3$ ($n\ge 2, n\in N^*$)

∴ $0<|u_{n+1}-4|=\frac{|u_n-4|}{u_n}<\frac{1}{3}|u_n-4|<\frac{1}{3^2}|u_{n-1}-4|<\cdots<\frac{1}{3^n}|u_1-4|$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=4$.

法二: 奇偶讨论 $u_{n+1}-4=\frac{4-u_n}{u_n}=\frac{4-(3+\frac{4}{u_{n-1}})}{3+\frac{4}{u_{n-1}}}=\frac{u_{n-1}-4}{3u_{n-1}+4}$

∴ $u_{n+1}-4$与$u_{n-1}-4$同号

(1) 若$u_1>4$, 则$u_{2n+1}>4$. $\{u_{2n-1}\}$有下界

(2) 若$u_1<4$则$u_{2n+1}<4$. $\{u_{2n-1}\}$有上界

∵ $u_{n+1}-u_{n-1}=\frac{-3(u_{n-1}+1)(u_{n-1}-4)}{3u_{n-1}+4}$

(3) 若$u_1>4$则$u_{2n+1}>4$. ∴$\{u_{2n-1}\}$单调递减且有下界 ∴$\{u_{2n-1}\}$收敛

(4) 若$u_1<4$则$u_{2n+1}<4$ ∴ $\{u_{2n-1}\}$ ↗且有sup. ∴$\{u_{2n-1}\}$收敛.

(5) 若$u_1=4$. $u_n=4$ ∴$\{u_n\}$为常数列 收敛.

$u_{n+1}-4=\frac{4-u_n}{u_n}=\frac{u_{n-1}-4}{3u_{n-1}+4}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n-1}=4$.

奇⇒偶 又$u_{2n}=3+\frac{4}{u_{2n-1}}$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n}=4$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}=4$

例6. $a_1=2$. $a_{n+1}=\frac{2a_n^3+1}{3a_n^2}$ 证明$\{a_n\}$收敛. 求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$a_{n+1}-a_n=\frac{1-a_n^3}{3a_n^2}\Rightarrow$ 只需证 $a_n>1$

$a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+\frac{1}{a_n^2})=\frac{1}{3}(a_n+a_n+\frac{1}{a_n^2})\geq 1$ 当且仅当 $a_n=1$ 时取等.

$\therefore \{a_n\}\downarrow$. $a_n\geq 1$ $\therefore \{a_n\}$收敛. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

例7. $a_1=a_2=1$. $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geq 3, n\in N^*)$ 证明 $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ 收敛. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$a_{n+1}=a_n+a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}$ $\therefore b_n=1+\frac{1}{b_{n-1}}$

法一. $b_{2n+1}-b_{2n-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2n-1}}}-b_{2n-1}=\frac{1+b_{2n-1}-b_{2n-1}^2}{1+b_{2n-1}}$ $(*)$

令 α 为 $x=1+\frac{1}{x}$ 根. 即 $\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$ $\therefore (*)=\frac{(\alpha-b_{2n-1})(\alpha-1+b_{2n-1})}{1+b_{2n-1}}>0$

$b_{2n+2}-b_{2n}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2n}}}-b_{2n}=\frac{(\alpha-b_{2n})(\alpha-1+b_{2n})}{1+b_{2n}}<0$

$\therefore b_{2n-1}\in(0,\alpha)$, $b_{2n}\in(\alpha,+\infty)$ (由数归)

$\therefore \{b_{2n-1}\}\uparrow$ $\{b_{2n}\}\downarrow$. 且均有界 $\begin{cases} b_{2n}=1+\frac{1}{b_{2n-1}} \\ b_{2n+1}=1+\frac{1}{b_{2n}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1+\frac{1}{A} \\ A=1+\frac{1}{B} \end{cases} \Leftrightarrow A=B=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

简化数据实验结构

法二. 压缩映像: 记 α 为 $\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$ 根.

$\therefore |b_{n+1}-\alpha|=|1+\frac{1}{b_n}-\alpha|=|1+\frac{1}{b_n}-1-\frac{1}{\alpha}|=\frac{|b_n-\alpha|}{b_n\alpha}\leq\frac{1}{\alpha}|b_n-\alpha|$

总结. 利用"压缩映像"证明数列极限存在. (整体不单调)

1. 不动点型. 设 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1}-A|\leq r|a_n-A|$ $(n\geq n_0, n_0\in N^*)$, $0<r<1$.

则 $\{a_n\}$ 收敛 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. (缺点:需知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$)

证明: $\forall n\geq n_0$ $|a_{n+1}-A|\leq r|a_n-A|$

$\therefore 0\leq|a_{n+1}-A|\leq r|a_n-A|\leq\cdots\leq r^{n-n_0+1}|a_{n_0}-A|$

又 $0<r<1$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}r^{n-n_0+1}|a_{n_0}-A|=0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

变式: $a_n>0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}<r<1$ $(\forall n>n_0)$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

$a_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_1<r^n a_1\to 0$

2. Cauchy收敛准则型 设 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1}-a_n|\leq r|a_n-a_{n-1}|$ $(n\geq n_0, n_0\in N^*)$,

$0<r<1$. 则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: $\forall n\geq n_0$. $|a_{n+1}-a_n|\leq r|a_n-a_{n-1}|\leq\cdots\leq r^{n-n_0}|a_{n_0+1}-a_{n_0}|$

$|a_{n+p+1}-a_n| \le |a_{n+p+1}-a_{n+p}| + \cdots + |a_{n+1}-a_n|$

$\le (r^p + \cdots + r + 1)|a_{n+1}-a_n| = \frac{1-r^{p+1}}{1-r}|a_{n+1}-a_n|$

$\le \frac{1}{1-r} r^{n_0} |a_{n_0+1}-a_{n_0}| \le \varepsilon$

根据 Cauchy 收敛准则 $\{a_n\}$ 收敛.

2. 子数列：设 $\{a_n\}$ 为实数列，$\{n_k\}$ 为 N^* 无限子集 且 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，则 $\{a_{n_k}\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的一个子数列 / 子列.（k 为变量）

$N^* \to N^*$　$1, 2, \cdots, k, \cdots$　$\{x_n\}$

$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$　$\{x_{n_k}\}$　$\therefore k \le n_k$

数列与子数列之间的关系：定理1. $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 的任何一个子数列均收敛. 且极限相等.

可证 $\{a_n\}$ 的任何一个子数列均收敛 $\Rightarrow$ 极限相等.

取 $x_n \to x$，$y_n \to y$. 构造 $\{z_n\}$：$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots \to z$

$\therefore x = y = z$.

定理1'. $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 的任何一个非平凡子数列均收敛.（去掉有限项）

必要性：$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$. $\exists N>0$. $\forall n>N$. $|x_n - x|<\varepsilon$

取 $K=N$，$\forall k>K$　$|x_{n_k}-x|<\varepsilon$

（由 $n_k \ge k > K = N$）

充分性：取 $\{a_{2n-1}\} \to A$，$\{a_{2n}\} \to B$，$\{a_{3n}\} \to C$

$\left.\begin{array}{l}\{a_{6n-3}\} \text{收敛} \Rightarrow A=C \\ \{a_{6n}\} \text{收敛} \Rightarrow B=C\end{array}\right\} \Rightarrow A=B \text{，} \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$

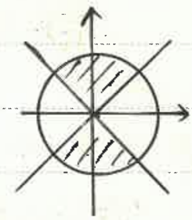
$\therefore \{a_n\}$ 收敛. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

定理1''. 若 $\{a_n\}$ 两个不同子列 $\{x_{n_k'}\}$，$\{x_{n_k''}\}$ 分别收敛到不同极限 A, B，则 $\{a_n\}$ 必发散.

例. 证明 $\{\sin\frac{n}{4}\pi\}$ 发散.

取 $a_{4n}=0$, $a_{8n+2}=1$ ∴ $\{\sin\frac{n}{4}\pi\}$ 发散.

例. 证明 $\{\sin n\}$ 发散.



法一: 子数列: 设 $\{\sin n\}$ 收敛.

$\exists n_k\in(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3}{4}\pi+2k\pi) \Rightarrow \sin n_k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n_k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\exists n_k\in(-\frac{3}{4}\pi+2k\pi, -\frac{\pi}{4}+2k\pi) \Rightarrow \sin n_k\leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n_k\leq-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 矛盾.

法二. Cauchy: 取 $\varepsilon_0=1$. $\forall N>0$.

$\exists n_k\in(2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{3}{4}\pi)$. $n_k\in N$ $\sin n_k>\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\exists m_k\in(2k\pi-\frac{3}{4}\pi, 2k\pi-\frac{\pi}{4})$. $m_k\in N$. $\sin m_k<-\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $|\sin n_k-\sin m_k|>\sqrt{2}>1=\varepsilon_0$. ∴ $\{\sin n\}$ 发散

法三. 和差化积. 若 $\{\sin n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n=A$.

$\sin(n+1)-\sin(n-1)=2\cos n\sin 1 \Leftrightarrow \cos n=\frac{\sin(n+1)-\sin(n-1)}{2\sin 1}\longrightarrow 0$

又 $\cos(n+1)-\cos(n-1)=-2\sin 1\sin n \Leftrightarrow \sin n=\frac{\cos(n+1)-\cos(n-1)}{-2\sin 1}\longrightarrow 0$

而 $\sin^2 n+\cos^2 n=1 \Rightarrow 0=1$ 矛盾.

例. 任何数列都存在单调子列.

证明: 设 $\{a_n\}$. (1). $\forall k\in N^*$. $\{a_{k+n}\}$ 存在最大项

设 $\{a_{k+n}\}$ 最大项为 a_{n_1}. ∴ $\{a_{k+n_1}\}$ 存在最大项. 设为 a_{n_2}

∴ $n_1<n_2$. $a_{n_1}\geq a_{n_2}$

同理. $\exists n_3>n_2$. $a_{n_2}\geq a_{n_3}$. 可得 $\{a_{n_k}\}$ 满足 $a_{n_1}\geq a_{n_2}\geq\cdots\geq a_{n_k}\geq\cdots$

∴ 得到 $\{a_{n_k}\}\downarrow$.

(2). $\exists k\in N^*$. $\{a_{k+n}\}$ 无最大项

取 $n_1 = k+1$. ∵ $\{a_{k+n}\}$ 无最大项 ∴ $\exists n_2 > n_1,\ a_{n_2} > a_{n_1}$

同理 $\exists n_3 > n_2,\ a_{n_3} > a_{n_2}$ 可得 $\{a_{n_k}\}$ 满足 $a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots < a_{n_k} < \cdots$

∴ 得到 $\{a_{n_k}\}\uparrow$.

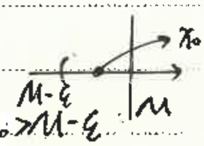
3. 实数完备性理论

(1) 确界原理：设 S 是非空的实数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界

（非空有界实数集必有上下确界）（注：$\mathbb{Q}$ 内不成立）

设 $S\,(\neq\emptyset)\subseteq\mathbb{R}$, $M=\sup S \Leftrightarrow$ 1° $\forall x\in S$, 有 $x\le M$.

2° $\forall\varepsilon>0\ \exists x_0\in S$, 有 $x_0 > M-\varepsilon$.



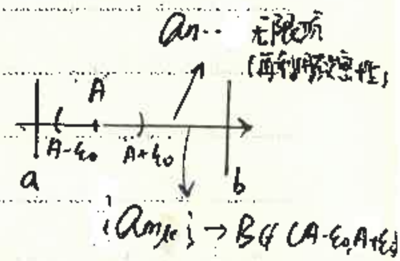
(2) 单调收敛准则：单调有界数列必收敛

（单调递增有上界的数列必收敛，单调递减有下界的数列必收敛）

(3) Weierstrass 致密性定理：任何有界数列必有收敛子列

（需证：任何数列都存在单调子列 + 单调收敛准则）

※ 有界发散数列存在两个收敛子列且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B\ (A\neq B)$.



(4) Cauchy 收敛准则：

$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0\ \forall m,n>N$, 均有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$

$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ \forall p\in\mathbb{N}^+$, 均有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ （便于处理级数的形式）

$\{a_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0\ \forall N>0,\ \exists m_0, n_0>N$, 有 $|a_{m_0}-a_{n_0}|\ge\varepsilon_0$

例：证明 $S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 发散

$|S_{n+p}-S_n| = \left|\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right| \ge \frac{p}{n+p}$

∴ $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\ \forall N>0,\ \exists n_0>N,\ \exists p=n_0\in\mathbb{N}^+$, 有 （∃变量需取值）

$|S_{n_0+p}-S_{n_0}|\ge\frac{1}{2}=\varepsilon_0$ ∴ S_n 发散

变式：证明 $S_n = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ 收敛

$|S_{n+p}-S_n| = |\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}| < \frac{p}{n^2}$

$\therefore \forall \varepsilon>0\ \exists N=\max\{[\frac{1}{\varepsilon}]\}$，使得 $\forall n>N, p\in \mathbb{N}^+$：$\therefore |S_{n+p}-S_n| \underset{\text{放缩技巧}}{<} \frac{1}{n} < \varepsilon$ $\therefore S_n$收敛.

(5) 区间套定理：设闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$满足 ① $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，

② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则存在唯一的实数$\xi$，满足 $\xi\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，即 $a_n\le\xi\le b_n$

(6) 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)聚点定理：实数轴上的任何有界无限点集S至少存在一个聚点。

聚点：$P_n(a_n,b_n)$. $\{P_n\}$点列 $P_n\to P_0(a,b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\end{cases}$

$\forall\varepsilon>0$, $\mathring{U}(x_0,\varepsilon)\cap S\ne\varnothing \Leftrightarrow \underset{(x_n\ne x_0)}{x_n\in S}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$

(7) 海涅-博雷尔(Heine-Borel)有限覆盖定理：设H是闭区间$[a,b]$的一个(无限)开覆盖，则从H中可选出有限个开区间覆盖$[a,b]$. (无限→有限)

注：无限集不一定存在最大值与最小值，但有限集一定存在最大值与最小值，若无限开覆盖中存在有限覆盖，就可讨论最小(大)问题。

无限覆盖：$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(a_\alpha,b_\alpha)$，$\alpha\in\Lambda$

$\bigcup\limits_{x\in[0,1]}(x,\delta_x)\supset[0,1] \Leftrightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n}(x_k,\delta_k)\supset[0,1]$

注：开区间无有限覆盖。区间套：$(0,1)\subseteq\bigcup\limits_{n=2}^{+\infty}(\frac{1}{n},1)$，$(0,\frac{1}{n})$不满足区间套

区间套定理证明：$a_1\le a_n\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b_n\le b_1$

$\therefore \{a_n\}\uparrow$，$\{b_n\}\downarrow$，且均有上下界

$\therefore$ 由单调收敛准则，$\{a_n\}\{b_n\}$均收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，且 $a_n\le\xi$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(b_n-a_n)+a_n]=\xi$

又 $\{b_n\}\downarrow$，$\therefore \xi\le b_n$ $\therefore \xi\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$

下证ξ唯一。若$\exists\eta\in\mathbb{R}$，$\eta\in[a_n,b_n]$ 则 $|\xi-\eta|\le b_n-a_n$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ $|\xi-\eta|\le\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0 \Rightarrow \xi=\eta$

说明：(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$\xi-\varepsilon<a_n<b_n<\xi+\varepsilon$

$\therefore \forall n>N.\ [a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon)$

即开区间 $U(\xi,\varepsilon)$ 能覆盖 $n>N$ 的所有闭区间 $[a_n,b_n]$

(1) 若去掉 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则 $\xi\in[a_n,b_n]$ 不一定唯一.

$[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n] \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n] \neq \varnothing$

区间套定理中结论为 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ 是单点集

例1. 区间套定理 $\Rightarrow$ 致密性定理　　构造方式：一分为二（或一分为三）

证明：致密性定理即 $\{x_n\}$ 有界 $\Rightarrow$ 收敛子列

先取闭区间 $[a_1,b_1]$ 使得 $[a_1,b_1]$ 中有 $\{x_n\}$ 无限项.

再构造下一个闭区间 $[a_2,b_2]$：

将 $[a_1,b_1]$ 等分成两个子区间，则在 $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ 中至少有一个区间中有 $\{x_n\}$ 无限项.

将其记为 $[a_2,b_2]$，再将区间 $[a_2,b_2]$ 两等分. 同样，存在某个区间中有 $\{x_n\}$ 无限项，将其记为 $[a_3,b_3]$；…… 这样一直继续便得到一系列区间 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足

(1) $[a_n,b_n]$ 中含有 $\{x_n\}$ 无限项　（构造原则）

(2) $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$　(3) $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

这样便得到闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，根据闭区间套定理 $\exists$ 唯一 $\xi\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\dots)$

下证一定 $\exists\{x_n\}$ 子列收敛于 ξ

(1) $\because [a_1,b_1]$ 含 $\{x_n\}$ 中无穷多项，选取 $x_{n_1}\in[a_1,b_1]$

(2) 又 $[a_2,b_2]$ 含 $\{x_n\}$ 中无穷多项，选取 $\{x_n\}$ 中位于 x_{n_1} 后面的某一项 $x_{n_2}\in[a_2,b_2]$

(3) 依次可得数列 $\{x_n\}$ 中的 $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$，且 $n_k>n_{k-1}$（子列）

这样便得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$

而 $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=\xi$，根据夹逼定理：$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$

这样便得到了 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$.

总结：(1)闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 构造应遵循原则，P具有遗传性。

(2)后面的要一个套一个，即 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

例2 证明 $\mathbb{R}$ 不可数。

证明：只要证 $(0,1)$ 内实数不可数。

法一：若 $(0,1)$ 内实数可数，则 $(0,1)=\{0.a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots,\ 0.a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots,\ \cdots,$

$0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots,\ \cdots\}$，其中 $a_{ij}\in\mathbb{N}$，且 $0\le a_{ij}\le 9$.

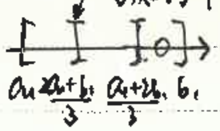
$(0.00\cdots0\cdots)$ $(0.99\cdots9\cdots)$

记 $x_0=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$，且 $b_k\ne a_{kk}$，b_k 不取 0 或 9 $\therefore x_0\ne 0$ 且 $x_0\ne 1$，故 $x_0\in(0,1)$.

显然 x_0 与集合中任何元素都不等，从而 $x_0\notin(0,1)$，但 $x_0\in(0,1)$ 矛盾！

法二：取 $[a_1,b_1]$ 使 $x_1\notin[a_1,b_1]$ $\xrightarrow{\text{分成三份}}$ 取 $[a_2,b_2]$ 使 $x_2\notin[a_2,b_2]$

分成三份：防止落在端处.



得到 $x_k\notin[a_k,b_k]$ $(\forall k\le n)$

(1) $x_n\notin[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ (2) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$

(3) $b_n-a_n=\frac{1}{3^{n-1}}(b_1-a_1)\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$

这样，$\{[a_n,b_n]\}$ 为一区间套，由区间套定理知 $\exists$ 唯一 $\xi\in[a_n,b_n]$

但 $x_n\notin[a_n,b_n]$ $\therefore\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists\ \xi\ne x_n$ 与 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\mathbb{R}$ 矛盾。

定理. 若 $\{x_n\}$ 为无界数列，则 $\exists$ 子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\infty$.

证明：$\{x_n\}$ 无界 $\Rightarrow\forall G>0$，$\exists n_0\in\mathbb{N}$，$|x_{n_0}|>G$

取 $G_1=1$，$\exists n_1\in\mathbb{N}$，$|x_{n_1}|>G_1$

取 $G_2=\max\{G_1,2\}$，$\exists n_2(>n_1)\in\mathbb{N}$，$|x_{n_2}|>G_2$.

依次类推，取 $G_k=\max\{G_{k-1},k\}$ 则 $\exists\ \underline{n_k(>n_{k-1})}\in\mathbb{N}$，$|x_{n_k}|>G_k$

$\therefore\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=\infty$.

柯西收敛准则证明：先证必要性，设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. $\therefore\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$：$\forall n>N$，$|a_n-A|<\frac{1}{2}\varepsilon$

联系

$\therefore \forall n>N,\ \forall p\in N^*,\ |a_{n+p}-a_n|=|(a_{n+p}-A)-(a_n-A)|\le|a_{n+p}-A|+|a_n-A|<\varepsilon$

再证充分性，思路：定义证明 ⇐ 找到极限 ⇐ 致密性定理 ⇐ 有界

取 $\varepsilon=1$ $\therefore \exists N_0>0,\ \forall n>N_0,\ |a_n-a_{N_0+1}|<\varepsilon=1$

$\therefore \forall n>N_0,\ |a_n|\le|a_{N_0+1}|+1$ $\therefore \{a_n\}$ 有界

由致密性定理知，$\{a_n\}$ 存在收敛子列 $\{a_{n_k}\}$，记 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=A$ （找到极限）

对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists K>0,\ \forall k>K,\ |a_{n_k}-A|<\varepsilon$

又对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1>0,\ \forall n>N_1,\ \forall p\in N^*,\ |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

$\therefore$ 取 $N=\max\{N_1,K\}$，$\forall n>N,\ k>N,\ n_k>n_K\ge K\ge N$

$\therefore |a_n-A|\le|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$.

例：证明 $a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

法一：不等式：$a_n=1+\frac12+\cdots+\frac1n>\ln(n+1)\to+\infty$

法二：分组：$a_n=1+\frac12+(\frac13+\frac14)+\cdots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n})>1+\frac{n}{2}\to+\infty$

法三：反证：设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A\in\mathbb{R}$，$(a_{2n}-a_n)=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac12$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{2n}-a_n)=0$

法四：柯西：$\exists\varepsilon_0=\frac12,\ \forall N>0,\ \exists n_0>N,\ p_0=n_0$，$|a_{n_0+p_0}-a_{n_0}|=\frac{1}{n_0+1}+\cdots+\frac{1}{n_0+n_0}>\frac12$

变式：证明 p 级数 $a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，在 $p\le1$ 时发散.

当 $p\le1$ 时 $a_n>1+\frac12+\cdots+\frac1n>\ln(n+1)\to+\infty$

当 $p>1$ 时 $\{a_n\}\uparrow$，寻找上界

又 $a_{2^n}=1+\frac{1}{2^p}+(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p})+\cdots(\frac{1}{(2^{n-1}+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^n)^p})$

$<1+1+\frac{2}{2^p}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)p}}=1+1+\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+(\frac{1}{2^{p-1}})^{n-1}$

$=1+\frac{1-q^n}{1-q}<1+\frac{1}{1-q}$ $\therefore \{a_n\}$ 收敛.

(8) 实数的完备性：$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ p\in N^*,\ |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$，称 $\{a_n\}$ 为基本数列（柯西数列）

实数的完备性：基本数列在实数范围内必收敛.

注：有理数集不具备完备性（$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$，$(1+\frac{1}{n})^n \to e \notin \mathbb{Q}$）

例：柯西收敛准则 ⇒ 区间套

$\forall m>n$，$a_n<a_m<b_n$ ∴ $0\le a_m-a_n<b_n-a_n$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$ ∴ $\{a_n\}$为基本列 ∴ $\{a_n\}$收敛

记 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\xi\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n+a_n)=\xi \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\xi$

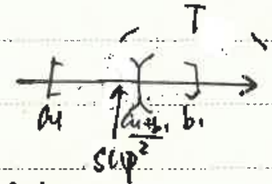
又 $\{a_n\}\uparrow$，$\{b_n\}\downarrow$ ∴ $a_n\le\xi\le b_n \Rightarrow \xi\in[a_n,b_n]$

若 $\exists\eta\in\mathbb{R}$，$\eta\in[a_n,b_n]$ 则 $|\xi-\eta|\le b_n-a_n$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$

∴ $|\xi-\eta|\le\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0\Rightarrow\eta=\xi$.

例：区间套 ⇒ 确界

设 $T=\{t\mid\forall x\in S, x\le t\}$



构造区间套：取 $a_1,b_1\in\mathbb{R}$，$a_1\notin T$，$b_1\in T \Rightarrow a_1<b_1$

构造 $[a_2,b_2]$：$\begin{cases}[a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}], & \frac{a_1+b_1}{2}\in T\\ [a_2,b_2]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1], & \frac{a_1+b_1}{2}\notin T\end{cases}$

依次可得 $[a_n,b_n]$：$\begin{cases}[a_n,b_n]=[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}], & \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\in T\\ [a_n,b_n]=[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}], & \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\notin T\end{cases}$

由此得到一个闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$满足：

(1) $a_n\notin T$，$b_n\in T$ (2) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ (3) $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1)$

∴ $\{[a_n,b_n]\}$为闭区间套，从而∃唯一 $\xi\in[a_n,b_n]$（找确界）⇒ $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

下证 ξ为 $\sup S$.

(1) 上界：若 $\xi\notin T$ 即 ξ不是S上界 ⇒ $\exists x'\in S$，$x'>\xi$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi<x'$ ∴ n充分大时 $b_n<x'$ 与 $b_n\in T$矛盾 ∴ $\xi\in T$ 即 ξ是S上界

(2) 最小上界：若 $\exists \eta \in T$, $\eta < \xi$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi > \eta$ ∴ 当 n 充分大时 $a_n > \eta$. 而 $a_n \notin T$

∴ $\exists x' \in S$. $x' > a_n > \eta$ 与 $\eta \in T$ 矛盾 ∴ ξ 是 S 最小上界，即上确界.

问2：柯西 ⇒ 确界

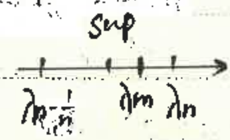
实数的阿基米德性：$\forall a>0, b>0$. $\exists n \in N$. 使得 $na > b$ (公理).

设 S 是非空有上界的数集. 由实数的阿基米德性. $\forall \alpha > 0$. $\exists k_\alpha \in \mathbb{Z}$. 使得 $\lambda_\alpha = k_\alpha \alpha$ 为 S 的上界. 而 $\lambda_\alpha - \alpha = (k_\alpha - 1)\alpha$ 不是 S 的上界. 即

$\forall x \in S$, $x \le \lambda_\alpha$. $\exists x' \in S$. $x' > \lambda_\alpha - \alpha$.

取 $\alpha = \frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ $\forall n \in N^*$. $\exists \lambda_n$

使得 λ_n 为 S 的上界. 而 $\lambda_n - \frac{1}{n}$ 不是 S 的上界.



∴ $\exists x' \in S$. $\lambda_n - \frac{1}{n} < x' \le \lambda_n$.

又 $\forall m \in N^*$. $\exists \lambda_m$ 为 S 上界. $\lambda_m - \frac{1}{m}$ 不为 S 上界

∴ $\exists x' \le \lambda_m$ ∴ $\lambda_n - \frac{1}{n} < x' \le \lambda_m \Rightarrow \lambda_n - \lambda_m < \frac{1}{n}$

同理 $\lambda_m - \lambda_n < \frac{1}{m}$. ∴ $|\lambda_m - \lambda_n| < \max\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\}$ 趋近

∴ $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N > [\frac{1}{\varepsilon}] > 0$. 当 $m, n > N$ 时 有 $|\lambda_m - \lambda_n| < \varepsilon$.

∴ $\{\lambda_n\}$ 为 Cauchy 列 ∴ $\{\lambda_n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. (找上确界)

下证 λ 为 S 上确界

(1) 上界：$\forall a \in S$. $\forall n \in N$. $a \le \lambda_n$ ∴ $a \le \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. ∴ λ 为 S 上界.

(2) 最小上界：$\forall \varepsilon > 0$. ∵ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ∴ 对充分大的 n 有 $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 且 $\lambda_n > \lambda - \frac{\varepsilon}{2}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda)$.

又 $\lambda_n - \frac{1}{n}$ 不是 S 上界 ∴ $\exists a' \in S$. $a' > \lambda_n - \frac{1}{n} > (\lambda - \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} = \lambda - \varepsilon$

∴ $\lambda - \varepsilon$ 不是 S 上界 ∴ $\lambda = \sup S$.

总结：(1) Cauchy 收敛准则表明：由实数构成的基本数列 $\{a_n\}$ 一定收敛，称为实数的完备性.

(2) 柯西 ⇒ 确界 说明实数集的完备性与连续性是等价的

数学分析：确界 ⇒ 单调收敛 ⇒ 闭区间套 ⇒ 致密性 ⇒ Cauchy 收敛 ⇒ 确界

§1 函数极限

1. 函数在无穷远处的极限：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，若 ∃ 常数 $A\in\mathbb{R}$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，均有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 有极限 A，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

--- $(-\infty,a]$ --- --- --- ---

$-x<-X$ --- --- --- $x\to-\infty$ --- --- --- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，若 ∃ 常数 $A\in\mathbb{R}$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，均有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 有极限 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

注：① $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在：$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$

② $\lim\limits_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$ 不存在：$\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}\neq\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}$

利用极限定义函数：
$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 不存在, & x=-1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1\end{cases}=\begin{cases}0, & -1<x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$
（讨论 $|x|=1$，$|x|\neq1$）

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n+1}-2x^{2n}+3x}{x^{2n}+1}=\begin{cases}1, & x=1,\\ 3x, & -1<x<1,\\ -3, & x=-1,\\ x-2, & |x|>1\end{cases}$$

$(x>0)$
$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}x^n=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ 1, & x=1,\\ +\infty, & x>1.\end{cases}$$

例：证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

对 $\forall\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$（作出 $y=\tan x$）$\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan x<\varepsilon \Leftrightarrow \arctan x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon \Leftrightarrow x>\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$

$\therefore$ 取 $X=\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)>0$，$\forall x>X$，$\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$.

同理可证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

注：函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在与否，与 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义、函数值是多少无关。如 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\ne \\ \pi, & x= \end{cases}$

2. 函数在有限点处的极限：设 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域（$\mathring{U}(x_0)$，趋向过程）内有定义，若 $\exists$ 常数 $A\in\mathbb{R}$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，均有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处有极限 A。

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。 $\varepsilon-\delta$ 语言

注：δ 依赖于 ε 取值，即 $\delta=\delta(\varepsilon)$，$\varepsilon$ 越小，δ 也越小。

函数极限计算与数列极限有类似的四则运算法则

3. 函数极限的性质：定理1.（唯一性）：若函数在某点有极限，则极限唯一。

证明：假设 $f(x)\to A$，$f(x)\to B$。

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$

$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，$|f(x)-B|<\varepsilon$。

越近越满足

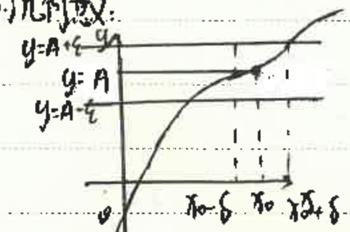
$\therefore\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，$|f(x)-A|<\varepsilon$，$|f(x)-B|<\varepsilon$。

$\therefore |A-B|=|f(x)-A-f(x)+B|\le|f(x)-A|+|f(x)-B|<2\varepsilon \Rightarrow A=B$

定理2.（局部有界性）：设 $f(x)$ 在 x_0 处有极限，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内有界。

定理3.（局部保号性）：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则 $\forall\alpha\in(0,A)$，$\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>\alpha$ （一般取 $\alpha=\frac{|A|}{2}$）

函数极限的几何意义：



$\exists\mathring{U}(x_0,\delta)$ 使 $f(x)$ 落在狭窄矩形区域内。

或充分大下 $f(x)$ 落在狭窄带形区域内。

4. 函数极限存在的充要条件：$f(x)$ 在 x_0 处有极限 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限均存在且相等。

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$。

或记为 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to x_0+0}$

$f(x_0-0)$ $\quad$ $f(x_0+0)$

注: $f'_+(x_0) \neq f'(x_0+0)$ 如 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>1\\ 2e^x, & x\le 1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2, & x>1\\ 2e^x, & x<1\end{cases}$ 无右导数但有导数的右极限

右导数 导数的右极限

$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\ge 0\\ 2\sin x+1, & x<0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ 2\cos x, & x<0\end{cases}$

例1. 证明 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3}{2x-1}=1$.

对 $\forall \varepsilon>0$. 要让 $\left|\frac{3}{2x-1}-1\right|=\frac{2|x-2|}{|2x-1|}<\varepsilon$

不妨假设 $|x-2|<1 \Leftrightarrow 1<x<3$. 则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{2}\}$. 当 $|x-2|<\delta$ 时.

$\frac{2|x-2|}{|2x-1|}<2|x-2|<2\delta<\varepsilon$

总结: (1) 限制讨论范围至 $U(x_0,\delta)$ (使 x 向 x_0 靠近)

(2) 需出现 $|x-x_0|$ 结构 引入 δ, 使 δ 与 ε 建立联系

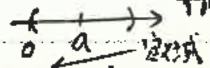
(3) 无需找最小的 δ, 找某个(最大的) δ (δ 越小越能满足条件)

例2. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. 利用和差化积构造 $x-x_0$

$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\frac{|x-x_0|}{2}<\varepsilon$ $\therefore \exists\delta=\varepsilon$

利用 $|\sin x|\le|x|$ ($x\in\mathbb{R}$)

例3. 证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ ($a>0$).



对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta=\min\{\sqrt{a}\varepsilon, a\}$. 当 $0<|x-a|<\delta$ 时. 有 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\le\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\varepsilon$ (需讨论 $a=0$)

5. 函数极限的夹逼定理: 设 $f(x)$. $g(x)$. $h(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义. 且 $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$. $f(x)\le g(x)\le h(x)$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$.

证明: $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_1>0$. 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时. $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\exists\delta_2>0$. 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时. $|h(x)-A|<\varepsilon$.

$\therefore \exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. $|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow f(x)>A-\varepsilon$. $|h(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow h(x)<A+\varepsilon$

$\therefore A-\varepsilon<f(x)\le g(x)\le h(x)<A+\varepsilon \Rightarrow |g(x)-A|<\varepsilon$

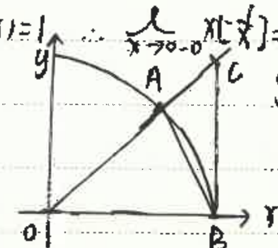
例. $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=$ __1__.

由 $x-1<[x]\le x$ ∴ $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$

当 $x>0$ 时 $1-x<x[\frac{1}{x}]\le1$ 又 $\lim\limits_{x\to0+0}(1-x)=1$ ∴ $\lim\limits_{x\to0+0}x[\frac{1}{x}]=1$

当 $x<0$ 时 $1<x[\frac{1}{x}]\le1-x$ 又 $\lim\limits_{x\to0-0}(1-x)=1$ ∴ $\lim\limits_{x\to0-0}x[\frac{1}{x}]=1$ ⇒ $\lim\limits_{x\to0}x[\frac{1}{x}]=1$

6. 两个重要极限：(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$



$S_{扇OAB}$为凸域.
(任意两点连线在图形内部).
$S_{凸域}>S_{内接多边形}$.

证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$S_{\triangle OAB}<S_{扇OAB}<S_{\triangle OBC}$

⟺ $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

⟺ $\sin x<x<\tan x$ ⟺ $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ ⇒ $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$

先证 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$. $0\le|\cos x-1|=2(\sin\frac{x}{2})^2\le2(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{2}\to0$

∴ $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\sin x}{x}=1$

又 $\lim\limits_{x\to0-0}\frac{\sin x}{x}\overset{x=-u}{=}\lim\limits_{u\to0+0}\frac{\sin(-u)}{-u}=\lim\limits_{u\to0+0}\frac{\sin u}{u}=1$ ∴ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

例：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{\tan5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{5x}{\tan5x}\cdot\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5}$

变式：(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}\overset{\arcsin x=t}{=\!=}\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1$ (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\tan bx}\cdot\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}\ (b\neq0)$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

提tanx.升次

变式：$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1})=\frac{1}{2}$. $0\cdot\infty$型 → $\frac{0}{0}$型 ⇒ $\frac{\sin x}{x}$

令 $\alpha=\arctan\frac{x}{x+1}$ ∴ $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1}{2x+1}$

∴ $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x\arctan\frac{1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}}\cdot\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

证明：当 $x>1$ 时，$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e \quad \therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

同样 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{x=-u}{=\!=} \lim\limits_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u} = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{u-1}\right)^u$

$= \lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^u = e \qquad \therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

例1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+3x}{1-4x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\frac{7x}{1-4x}\right)^{\frac{1-4x}{7x}}\right]^{\frac{7x}{x(1-4x)}} = e^7$ $\quad 1^\infty$ 型 $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

例2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\cos\frac{1}{x}}\right)^{x^2} \overset{x=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{x\to0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{2x^2}} = \lim\limits_{x\to0}\left\{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{2x^2}}$

$= e^{-\frac{1}{4}}$

利用换元简化: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x} \overset{\pi-x=u}{=\!=} \lim\limits_{u\to0}\frac{\sin(\pi-u)}{u} = 1$

例3. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0}$ $(a_nb_m\neq0,\ m,n\in\mathbb{N}^*)$

当 $m=n$ 时 $I = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}}{b_n+b_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+b_1\frac{1}{x^{n-1}}+b_0\frac{1}{x^n}} = \frac{a_n}{b_n}$

当 $m>n$ 时 $I=0$. 当 $m<n$ 时 $I=\infty$

综上. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0} = \begin{cases}0, & m>n,\\ \frac{a_n}{b_n}, & m=n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$

注: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 书写规范. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ (四则运算要求各项极限存在)

例4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-x+3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2+4x-1)-(x-3)^2}{\sqrt{x^2+4x-1}+(x-3)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{10x-10}^{一次}}{\underbrace{\sqrt{x^2+4x-1}+(x-3)}_{一次}} = 5$

变式1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}+x+3\right) \overset{\substack{法一:把-x当x\\ -x=x}}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x-1}-x+3\right)$

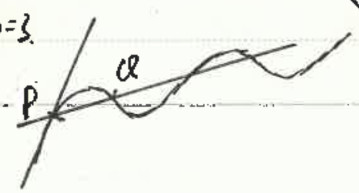
法二: $= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x-10}{\sqrt{x^2-4x-1}-(x-3)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{10}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}+\left(1-\frac{3}{x}\right)}$ 上下同除 $-x$. ($\sqrt{x^2}=-x,\ x<0$)

变式2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+(ax+b)\right)=1$, 求 a,b.

显然 $a>0$, 令 $-x=u$, $I = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2-4u+5}-(au-b)\right) = \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{(1-a^2)\overset{二次}{u^2}+(2ab-4)u+(5-b^2)}{\underbrace{\sqrt{u^2-4u+5}+(au-b)}_{一次}} = 1$

$\therefore 1-a^2=0\ ) \Rightarrow a=1 \quad \therefore I=b-2=1 \Leftrightarrow b=3$.

问题背景: 渐近线 (割线的极限位置)



例5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

先考虑 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+\cdots+x+1)}{x-1}=m.$ $\left(1+x+\cdots+x^{m-1}=\frac{x^m-1}{x-1}\right)$

$\therefore I=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$ (分配) $=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

变式: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\cdots+\sqrt[n]{x}-n}{x-1}$

先考虑 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[k]{x}-1}{x-1}\xlongequal{\sqrt[k]{x}=u}\lim\limits_{u\to1}\frac{u-1}{u^k-1}=\lim\limits_{u\to1}\frac{1}{1+u+\cdots+u^{k-1}}=\frac{1}{k}$

$\therefore I=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)+(\sqrt{x}-1)+\cdots+(\sqrt[n]{x}-1)}{x-1}=1+\frac12+\cdots+\frac1n$

例6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin2x}{x}+x\sin\frac{3}{x}\right)$

先定型: $\frac{\sin2x}{x}$: $\frac{C}{\infty}\to0$. $x\sin\frac3x$: $0\cdot\infty\to\frac00$

$0\le\left|\frac{\sin2x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\to0$ $\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin2x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac3x=\lim\limits_{x\to+\infty}3\frac{x}{3}\sin\frac3x=3$ $\therefore I=3$

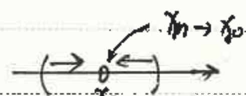
例7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{\frac1x}+2}{e^{\frac2x}+1}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$ → 分类讨论.

(1) $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{e^{\frac1x}+2}{e^{\frac2x}+1}\xlongequal{x=\frac1t}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t+2}{e^{2t}+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1+2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=0$, $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\sin x}{|x|}=1$

$\lim\limits_{x\to0-0}\frac{e^{\frac1x}+2}{e^{\frac2x}+1}=2$. $\lim\limits_{x\to0-0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0-0}\frac{\sin x}{-x}=-1$ $\therefore I=1$.

7. 函数极限存在的条件

(1) Heine归结原理: 设f在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在 ⟺ 对∀含在$\mathring{U}(x_0,\delta)$的数列$\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$, 且其对应的函数值构成的数列$\{f(x_n)\}$均收敛且极限相等 ($\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$存在且相等).



证明: (1) 必要性: 即要证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow f(x_n)\to A$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0\ (x_n\ne x_0)$. 取$\varepsilon=\delta$, $\exists N>0$, 当$n>N$时有$0<|x_n-x_0|<\delta$ 代入

$\therefore|f(x_n)-A|<\varepsilon$ $\therefore\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$

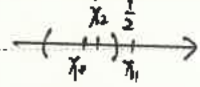
Heine VS 子列: (1)必要性证明: $x_{n_{k\ge k}}>x_N$ 下标→下标

$0<|x_{n>N}-x_0|<\delta$ 下标→极限

充分性. 即要证 $f(x_n)\to A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 从全称量词入手进行取值.

反证: 假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ne A \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon_0>0$, 对 $\forall\,\delta>0$, $\exists\, x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$

取 $\delta_1=1$, $\exists\, x_1\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$, 有 $|f(x_1)-A|\ge\varepsilon_0$



取 $\delta_2=\min\{\frac12, |x_1-x_0|\}$, $\exists\, x_2\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$, 有 $|f(x_2)-A|\ge\varepsilon_0$

...

取 $\delta_n=\min\{\frac1n, |x_{n-1}-x_0|\}$, $\exists\, x_n\in \mathring{U}(x_0,\delta_n)$, 有 $|f(x_n)-A|\ge\varepsilon_0$

构造 $\{x_n\}$ 满足 $0<|x_n-x_0|<\frac1n \Rightarrow x_n\to x_0$

且 $|f(x_n)-A|\ge\varepsilon_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ne A$. 矛盾!

综上, 即证.

应用: 从反面说明函数极限不存在. 即若 $\exists\{x_n\}$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$, 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 极限不存在. 或若 $\exists\{x_n\},\{y_n\}$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)=B$, 当 $A\ne B$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

例. 证明 $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac1x$ 不存在.

记 $f(x)=\sin\frac1x$, 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac\pi2}$, 则 $f(x_n)=0$, $f(y_n)=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)=1$ $\therefore \lim\limits_{x\to0}\sin\frac1x$ 不存在

(2) 函数左右极限存在的条件. 设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_+(x_0)$ 内有定义, 则 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}\subset\mathring{U}_+(x_0)$, $\{x_n\}\downarrow$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$, 均有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$

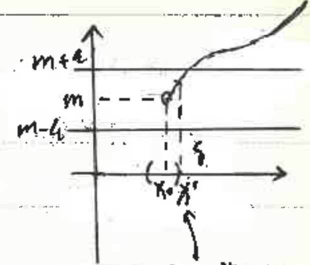
(3) 单调有界函数必有单侧极限. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathring{U}_+(x_0)$ 内的单调有界函数, 则 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 存在.

证明: 类似单调收敛准则, 先找到 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$.

① 构造 $S=\{f(x)\mid x\in U_+(x_0+\delta_0)\}$ 有界集,

② $m=\inf S$

③ 下证 $\forall\, x_n\searrow x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=m$.



② ⇐) $\forall x\in \mathring{U}_+(x_0,\delta_0)$，有 $f(x)\geq m$.

|对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists x'\in \mathring{U}_+(x_0,\delta_0)$，有 $\underline{f(x')<m+\varepsilon}$

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=x'-x_0>0$. 当 $x\in\mathring{U}_+(x_0,\delta)$ 时，

$x<x' \Rightarrow m-\varepsilon<m\leq f(x)<\underline{f(x')<m+\varepsilon}$

即 $|f(x)-m|<\varepsilon$. 即证.

$f(x')$已落入$U(m,\varepsilon)$
使$f(x)$落入$U(m,\varepsilon)$
$\Rightarrow x\in\mathring{U}(x_0,x'-x_0)$

8. 函数极限的柯西收敛准则：设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta_0)$内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在

⇔ 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ ($\delta<\delta_0$) 当 $x',x''\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

证明：必要性：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

当 $x',x''\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|\leq|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

充分性：数列极限柯西+归结

对 $\forall\{x_n\}\subset\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$

$\because\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ ($\delta<\delta_0$) 当 $x',x''\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ $\therefore$ $\underline{对上述}\delta>0$，$\exists N>0$，当 $m,n>N$ 时，$\underline{x_m,x_n\in\mathring{U}(x_0,\delta)}$.（代入过程）

$\therefore|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$ 由数列极限柯西知 $\{f(x_n)\}$ 收敛，记极限为A

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 由函数极限归结原理知，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta_0)$内有定义. 当$f(x)$在$x_0$处极限不存在，则

$\exists\varepsilon_0>0$ $\forall\delta>0$ $\exists x',x''\in\mathring{U}(x_0,\delta)$, s.t. $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$.

应用：欲判断函数$f(x)$在x_0处极限不存在，只需构造数列$\{x_n\},\{y_n\}$满足

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，$x_n\neq x_0$，$y_n\neq x_0$ (2) $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$

例：极限 $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

证明：记 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

$\therefore\forall\delta>0$，均有 $x_m,x_n\in\mathring{U}(0,\delta)$，但 $|f(x_m)-f(x_n)|=1\underset{(记作)}{\triangleq}\varepsilon_0$

~柯西：保持距离 ⟷（过程）

~海涅：不一致趋向 ⟶（结果）

例2. 若$f(x)$是$\mathbb{R}$上的周期函数,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. 证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0$.

证:设$f(x)$周期为$T>0$. 若$f(x)\not\equiv C$, 则$\exists a,b\in[0,T)$, s.t. $f(a)\neq f(b)$.

取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}|f(b)-f(a)|>0$. $\forall X>0$, $\exists n\in\mathbb{N}$, s.t. $nT+a>X$, $nT+b>X$

但$|f(nT+a)-f(nT+b)|=|f(a)-f(b)|>\frac{1}{2}|f(b)-f(a)|=\varepsilon_0$

由Cauchy收敛准则知: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在. $\therefore f(x)\equiv C$

又$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=C=0$. $f(x)\equiv 0$.

例3. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上满足$f(x^2)=f(x)$,且$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}=f(1)$. 证明$f(x)\equiv f(1)$ ($\forall x\in(0,+\infty)$).

$\forall x>0$, $f(x)=f(x^2)=\cdots=f(x^{2^n})$

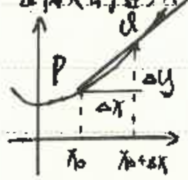
当$0<x<1$时, $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x^{2^n})=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(1)$.

当$x>1$时 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x^{2^n})=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(1)$. $\therefore \forall x>0$, $f(x)=f(1)$.

或: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(1)$ $\therefore$ $x>1$ $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x^{-2^n})=f(1)$.

§2 连续函数

1. 函数的连续：设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（$f(x_0)$ 需存在），则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续



设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ …

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$（$f(x)$ 在 x_0 处的增量），若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ …（与导数联系）

（可导 $\Rightarrow$ 连续）

2. 区间上的连续函数：设 $f(x)$ 在开区间 I 上有定义，且在 I 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 是开区间 I 内的连续函数

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b-0)=f(b)$

$\begin{cases} f(a+0)=f(a) \\ f(b-0)=f(b) \end{cases}$ 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

注：$[a,b]$ 上的连续函数有很多很好的性质：有界性定理、最值定理、零点存在定理、介值定理、一致连续性等

例1. $f\in C(a,b)$（(a,b) 上连续的函数集合，$C^n[a,b]$：$[a,b]$ 上 n 阶导数连续的函数集合）

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-y|<\delta$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$　（$x,y\in(a,b)$，$a,b\in\mathbb{R}$）

思路：固定变量，例：x_0 $\underset{x,\ y}{(\quad)}$

例2. 设 $f\in C(a,b)$ 且 $f(a+0)$，$f(b-0)$ 存在，证明 f 在 (a,b) 内有界

补充定义：$\Rightarrow f\in C[a,b]$，有界性定理

例1. 证明 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

$\forall x_0\in\mathbb{R}$ $\because |\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\dfrac{x+x_0}{2}\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\le 2\dfrac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|$

$\therefore \forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\varepsilon$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|=|\sin x-\sin x_0|\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon$

$\therefore f(x)=\sin x$ 在 x_0 处连续，从而 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

例2. 证明 $f(x)=e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续

$\because \lim\limits_{x\to x_0} e^x=e^{x_0}\lim\limits_{x\to x_0} e^{x-x_0}$　$\therefore$ 只需证 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处连续　$|\ln(1-\varepsilon)|=\ln\frac{1}{1-\varepsilon}>\ln(1+\varepsilon)$ 能确定大小

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\ln(1+\varepsilon)$，当 $|x|<\delta$ 时，　$|e^x-1|<\varepsilon \Leftrightarrow \ln(1-\varepsilon)<x<\ln(1+\varepsilon)$
$(0<\varepsilon<1)$　　定义域限制 $\varepsilon\in(0,1)$

极限 $\xrightarrow{\text{定义}}$ 连续
左右 左右

3. 左右连续：如果 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续。若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续。

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处左右连续

注：分段函数在分界点处的连续性，一般按定义分别计算其左右极限，判断是否左右连续，经常与可导性一起讨论

4. 连续函数的四则运算与复合函数的连续性：设 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，则

(1) $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ $[g(x_0)\neq 0]$ 在 x_0 处也连续（证明：函数极限运算法则）

(2) 若 $u=g(x)$ 在 x_0 处连续，$y=f(u)$ 在对应点 $u_0=g(x_0)$ 处连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 x_0 处连续

思路：目标：$|f(g(x))-f(g(x_0))|<\varepsilon$

条件：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当 $|u-u_0|<\eta$ 时，$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$

将 $g(x)$ 代入

证明：$\because$ $y=f(u)$ 在 u_0 处连续 $\therefore$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当 $|u-u_0|<\eta$ 时，$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$。

对上述 $\eta>0$，$\because$ $u=g(x)$ 在 x_0 处连续，$\therefore$ $\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|g(x)-g(x_0)|=|g(x)-u_0|<\eta$

$\therefore$ $|f(g(x))-f(u_0)|=|f(g(x))-f(g(x_0))|<\varepsilon$ $\therefore$ $f(g(x))$ 在 x_0 处连续。

应用：证明 x^α 连续　　x^α $\underline{\text{指数}}$ $e^{\alpha\ln x}$ 连续

5. 反函数的连续性：设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调，$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上连续，且与 $f(x)$ 有相同的单调性

证明：(1) 值域：不妨设 f 在 $[a,b]$ 上 $\uparrow$，则对 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(a)\le f(x)\le f(b)$

（原函数连续的区间决定了反函数连续的区间）$\therefore$ $f(a)$，$f(b)$ 为 f 最小、最大值（由最值定理）

$\therefore$ 由介值定理知，$f(x)$ 值域为 $[f(a),f(b)]$

(2) 下证 f^{-1} 在 $[f(a),f(b)]$ 上单调递增：

（定义证明需 $\forall y_1,y_2$，采用反证）反证：若 f^{-1} 不 $\uparrow$，则 $\exists$ $y_1<y_2\in[f(a),f(b)]$，但 $f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$

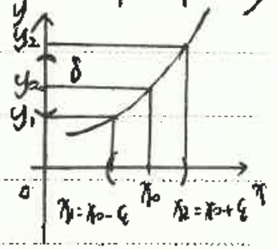
记 $f^{-1}(y_1)=x_1$，$f^{-1}(y_2)=x_2$ $\because$ $f\uparrow$ $\therefore$ $f(x_1)>f(x_2)$

（单调性方面的推理，需明确证明方向）

即 $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$ 矛盾！ $\therefore f^{-1}$ 在 $[f(a), f(b)]$ ↗.

(3) 对 $\forall y_0 \in [f(a), f(b)]$，则 $x_0 = f^{-1}(y_0) \in [a, b]$

$\forall \varepsilon > 0$，记 $x_1 = x_0 - \varepsilon$，$x_2 = x_0 + \varepsilon$，对应 $y_1 = f(x_1)$，$y_2 = f(x_2)$.



取 $\delta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$，对 $\forall y \in U(y_0, \delta)$，

$\underline{y_1} \leq y_0 - \delta < \underline{y} < y_0 + \delta \leq \underline{y_2}$　又 f^{-1} ↗.

$\therefore f^{-1}(y_0) - \varepsilon = x_1 = \underline{f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)} = x_2 = f^{-1}(y_0) + \varepsilon$

即 $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$　$\therefore f^{-1}(y)$ 在 $[f(a), f(b)]$ 上连续.

例：$y = \sin x$，$y = \tan x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ↗，反函数 $y = \arcsin x$，$y = \arctan x$ 在 $[-1, 1]$，$(-\infty, +\infty)$ ↗.

6. 初等函数的连续性：基本初等函数在定义区间内连续
连续函数经过四则运算后依然连续
连续函数经过复合后依然连续
$\Rightarrow$ 初等函数在定义区间内均连续

$\therefore$ 对连续函数计算极限即计算该点处的函数值即可（分段函数分界点处除外）

7. 函数连续的性质：函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$（极限符号与函数符号之间可以交换次序）

若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则结论不成立.

如，对 Dirichlet 函数，取 $x_0 = \sqrt{2}$，$\exists$ 有理点列 $\{q_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = \sqrt{2}$

但 $\lim\limits_{n \to \infty} D(q_n) = 1$，而 $D(\lim\limits_{n \to \infty} q_n) = D(\sqrt{2}) = 0$　$\therefore \lim\limits_{n \to \infty} D(q_n) \neq D(\lim\limits_{n \to \infty} q_n)$

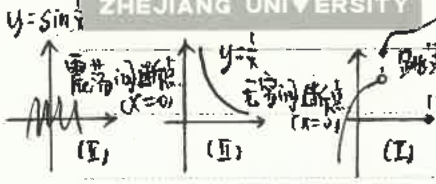
8. 函数的间断：如果 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，称为 $f(x)$ 在 x_0 处间断

函数不连续（间断）的情况：(1) $f(x)$ 在 x_0 处没有定义

(2) $f(x)$ 在 x_0 处极限不存在：
- 左右极限至少有一个不存在（第二类间断点）
- 左右极限存在但不相等（第一类间断点）

(3) 极限存在但不等于函数值　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$（可去间断点）

函数间断点的分类：(1) 第一类间断点：左右极限均存在的间断点，若 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$，这种间断点称为可去间断点（第一类间断点）



(2) 第二类间断点：除第一类间断点外的间断点，即左右极限至少有一个不存在。

初等函数可能间断点：分段函数分界点，无定义的点

例1. 求 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 间断点并判断类型.

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=0$. 第一类

当 $x=0$ 时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$ 第二类

例2. $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2-2x}{x^{2n}+1}$，讨论 $f(x)$ 连续性，求 $f(x)$ 间断点并判断其类型.

(1)

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n-1}+x^2-2x}{x^{2n}+1}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & (|x|>1)\\ x^2-2x, & (|x|<1)\\ 1, & x=-1.\\ 0, & (x=1).\end{cases}$$

$\therefore f(x)$ 除 $x=\pm1$ 外均连续

$\because \lim\limits_{x\to1+0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=-1$. 第一类

$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=3$. 第一类

例. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

例3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos3x-\cos x}{x^2}, & x<0,\\ A, & x=0,\\ \dfrac{\sin x+B\ln(1+x)}{x}, & x>0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 A, B

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{9(\cos3x-1)}{9x^2}+\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=-4$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=B+1=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)\quad\therefore A=-4,\ B=-5$$

9. 幂指函数的极限：若 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 处连续且 $f(x_0)>0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=[f(x_0)]^{g(x_0)}$

证：$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\ln f(x)]}=e^{g(x_0)\ln f(x_0)}$

$=[f(x_0)]^{g(x_0)}$

1^∞ 型极限的计算：设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=A$.

则 $\lim\limits_{x\to a}(1+f(x))^{g(x)}=e^A$.

例. 证明单调有界函数的间断点为跳跃间断点.

反证设 $f(x)$ 在 (a,b) 了. $x_0\in(a,b)$ 为 $f(x)$ 间断点. $\forall x<x_0<x'$ $f(x)\le f(x_0)\le f(x')$.

令 $x\to x_0^-$. $x'\to x_0^+$ 又 f 单调有界 $\therefore$ f 存在单侧极限（第一类） $\therefore f(x_0^-)\le f(x_0)\le f(x_0^+)$

$\because f(x)$ 有界 $\therefore f(x_0^-)$. $f(x_0^+)$ 为有限数 而 x_0 为 $f(x)$ 间断点. $\therefore$ 左右不同取 $\therefore f(x_0^-)<f(x_0^+)$

证: $\lim\limits_{x\to a}\ln(1+f(x))^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)}\times[f(x)g(x)]=A.$

$\therefore \lim\limits_{x\to a}(1+f(x))^{g(x)}=e^A.$

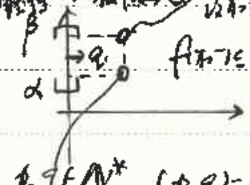
说明方法: $\lim\limits_{x\to a}(1+f(x))^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left[(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{f(x)g(x)}=e^A$

例. 单调函数的间断点最多可列数个.

思路: 跳跃区间中 $\exists q\in\mathbb{Q}$. 从而建立间断点 $\to\mathbb{Q}$.

而 $\mathbb{Q}$ 可列.

间断点 $\leftrightarrow$ 跳跃区间（两两不交） 有理数稠密性 $\Rightarrow$ 间断点 $\leftrightarrow\mathbb{Q}$



反证法设 $f(x)$ 在 (a,b) 了. 只有无限多间断点.

设 x_0 为间断点. 则 $f(x_0^-)<f(x_0^+)$

$f(x_0^-)\le f(x_0)\le f(x_0^+)$.

$\therefore (f(x_0^-), f(x_0^+))$ 为 x_0 对应跳跃区间.

下证跳跃区间不相交

设 $x_1<x_2$ 为间断点

$(f(x_1^-), f(x_1^+))\cap(f(x_2^-), f(x_2^+))=\phi$.

取 x, x' s.t. $x_1<x<x'<x_2$

$\therefore f(x)\le f(x')$

固定 x', 令 $x\to x_1^+$

$\therefore f(x_1^+)\le f(x')$

令 $x'\to x_2^-$

$\therefore f(x_1^+)\le f(x_2^-)$

$f(x_1^-)<f(x_1^+)\le f(x_2^-)<f(x_2^+)$

$\therefore$ 不相交

10. 黎曼函数的连续性: 设 Riemann 函数 $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}.\ p,q\in\mathbb{N}^*,\ (p,q)=1\\ 0, & x=0,1 \text{ 或 } (0,1) \text{ 内无理数.}\end{cases}$

证明: $R(x)$ 在任意 $x_0\in(0,1)$ 处的极限都为 0.

（从而 $R(x)$ 在无理点连续, 有理点间断）

思路: 要证 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|R(x)|<\varepsilon$.

目标: 找 δ. 不符条件的点. $\dfrac{1}{p}\ge\varepsilon \Leftrightarrow p\le\dfrac{1}{\varepsilon}\to$ 有限 $\to$ 最值

证明: (1) 在 $[0,1]$ 上分母为 n 的有理数最多只有 n 个.

(2) 对 $\forall x_0\in[0,1]$ 及 $\forall\varepsilon>0$（$\varepsilon<\frac{1}{2}$, 保证 $R(x)\ge\varepsilon$ 的点存在）满足 $\dfrac{1}{p}\ge\varepsilon$ 的

（p 有限, $\forall p$, $\frac{q}{p}$ 有限） 正整数 p 最多只有有限个（但至少有一个 2）. 设为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $x_1\ (\ x_0\ x_2\ )\ x_3$

取 $\delta=\min\{|x_1-x_0|, |x_2-x_0|, \cdots, |x_n-x_0|\}$. 则对 $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)\subset(0,1)$.

当 x 为无理数时. $|R(x)-0|=0<\varepsilon$.

当 x 为有理数时. 分母 $p>\dfrac{1}{\varepsilon}$. $\therefore |R(x)-0|=\dfrac{1}{p}<\varepsilon$.

$\therefore \forall x_0\in(0,1)$. $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$

例. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上函数 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 若对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 均有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 求 $f(x)$ 表达式

令 $x=y=0$ $\therefore f(0)=0$. 令 $y=-x$ $\therefore f(-x)+f(x)=0$ $\therefore f(x)$ 为奇函数.

$f(x)=kx$, $k=f(1)$ $\Rightarrow$ 找 $f(1)$.

$\forall n\in N^+$. $f(n)=f(n-1)+f(1)=f(n-2)+2f(1)=\cdots=nf(1)$

数域扩充. $f(1)=f(n\cdot\frac{1}{n})=f((n-1)\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n})=nf(\frac{1}{n})$ $\Rightarrow$ $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$

$f(\frac{m}{n})=mf(\frac{1}{n})=\frac{m}{n}f(1)$ $\forall m,n\in N^+$.

$\therefore \forall x\in Q^+$. $f(x)=f(1)x$

连续性: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$　　　　$x=0$处连续 $\longrightarrow R$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]=f(x)+\underline{\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)}=f(x)$ $\Rightarrow \Delta y=0$.

$f(x)$在x处连续. $\therefore$在R上连续.

$\forall x\in R^+$. x为无理数. $\exists$有理数列$\{x_n\}$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

$\therefore f(x)=f(\lim\limits_{n\to+\infty}x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(1)x_n=f(1)x$

$\therefore$由上得. $\forall x\in R^+$. $f(x)=f(1)x$

当$x<0$时. $f(x)=-f(-x)=-f(1)(-x)=f(1)x$.　　$\therefore f(x)=f(1)x$

变式 $f(x+y)=f(x)f(y)$. 讨论 $f(0)\neq 0$.

例 构造仅一点连续的函数.　$g(x)=\begin{cases}x, & x\in Q\\ -x, & x\notin Q\end{cases}$ ($g(x^2)$较好)

$f(x)=xD(x)$.　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$　当$x_0\neq 0$时. $\{p_n\}\in Q$ $\to x_0$. $\{q_n\}\notin Q$ $\to 0$ 不收敛.

变: 仅两点连续.

$f(x)=x(x-1)D(x)$.

例: 是否存在定义在R上的连续函数使得$f(f(x))=e^{-x}$.

反证法: 如果存在定义在R上的连续函数$f(x)$满足$f(f(x))=e^{-x}$

(1) $f(x)$是R上单射. 如果不然. 则$\exists x_1\neq x_2$ s.t. $f(x_1)=f(x_2)$ $\therefore f(f(x_1))=f(f(x_2))\Rightarrow e^{-x_1}=e^{-x_2}$ $\Rightarrow x_1=x_2$. 矛盾!

(2) $f(x)$在R上单调. 如果f在R上不单调. 则$\exists x_1<x_2<x_3$. s.t. $f(x_1)<f(x_2)$. $f(x_2)>f(x_3)$.

取$c\in(f(x_1),f(x_2))\cap(f(x_3),f(x_2))$. 由介值定理知. $\exists t_1\in(x_1,x_2)$. $t_2\in(x_2,x_3)$ s.t. $f(t_1)=c=f(t_2)$ 与f是单射矛盾

$f(x_1)>f(x_2)$. 但$f(x_2)<f(x_3)$时. 取$c\in(f(x_2),f(x_1))\cap(f(x_2),f(x_3))$. 由介值定理知.

$\exists t_1\in(x_1,x_2)$. $t_2\in(x_2,x_3)$. s.t. $f(t_1)=c=f(t_2)$. 与f是单射矛盾. $\therefore$由上. f是R上单调函数.

(3) 若$f\uparrow$. 则$f(f(x))\uparrow$ 与$g(x)=e^{-x}\downarrow$矛盾.　$\therefore$不存在R上连续函数f满足$f(f(x))=e^{-x}$

若$f\downarrow$. 则$f(f(x))\uparrow$. 与$g(x)=e^{-x}\downarrow$矛盾.

§3 无穷小量与无穷大量的阶

1. 无穷小量：设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量，记作 $f(x)=o(1)$

例：$x\to 0$ 时，$\sin x$，$\tan x$，x，$x+x^2$，x^2 均为无穷小量，但趋向于 0 速度并非一致

无穷小量与极限之间的关系：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时无穷小量

证明：$f(x)=A+(f(x)-A)=A+\alpha(x)$　$(f(x)-A \triangleq \alpha(x))$

2. 无穷小量的性质：$f(x)$，$g(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量，则

(1) $f(x)\pm g(x)$ 为无穷小量　(2) $f(x)\cdot g(x)$ 为无穷小量　(3) 若 $\alpha(x)$ 为有界变量，则 $\alpha(x)f(x)$ 是无穷小量

　　　　　　　　　　　　　　　　(大)　　　　　　　　　　　　　　(大)

注：有限个无穷小量的和差积均为无穷小量，但无限多个无穷小量的乘积并不一定是无穷小量

例 $\{a_n^{(1)}\}=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\cdots$　|　$\{a_n^{(1)}\}=1,2,3,\cdots,k,k+1,\cdots$

$\{a_n^{(2)}\}:1,2,\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\cdots$　|　$\{a_n^{(2)}\}=1,\frac{1}{2},3,\cdots,k,k+1,\cdots$

$\{a_n^{(3)}\}:1,1,3^2,\cdots,\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\cdots$　|　$\{a_n^{(3)}\}:1,1,\frac{1}{3^2},\cdots,k,k+1,\cdots$

$\{a_n^{(k)}\}:1,1,1,\cdots,k^{k-1},\frac{1}{k+1},\cdots$　|　$\{a_n^{(k)}\}:1,1,1,\cdots,\frac{1}{k^{k-1}},k+1,\cdots$

$\cdots\cdots$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(k)}=0$ 而 $a_n^{(1)}a_n^{(2)}\cdots a_n^{(k)}\cdots=1$ 并非无穷小量　|　$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{(k)}=+\infty$

而 $a_n^{(1)}a_n^{(2)}\cdots a_n^{(k)}=1$ 并非无穷大量

3. 无穷小量阶的比较：设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更高阶的无穷小量，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$（在 $\mathring{U}(x_0)$ 内满足：$0<A\le\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|\le B$）则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等阶无穷小量，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^k}=c\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 为 k 阶无穷小量 $(k>0)$

注：(1) 当 $x\to 0$，$x+x^2$ 为 1 阶无穷小量，并非 2 阶无穷小量（$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x^2}=\infty$）

(2) $o(1)\pm o(1)=o(1)$ (函数类) $o(x^n)+o(x^m)=o(x^n)$ $(n<m)$

无穷小量的和，其阶数就低不就高.

(3) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$ $(m>0,n>0)$ 阶数 $k\in(0,1)$

注：不是所有无穷小量可以确定阶数. 如 $x\sin\frac{1}{x}$ (振荡). $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^k}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{1-k}\sin\frac{1}{x}=0$ $\forall\, 0<k<1$.

$x=o(1)$ 意味着 $x\in o(1)$. $o(x^3)=o(x^2)$ 意味着 $o(x^3)\subset o(x^2)$

$o(x^2)+o(x^3)=o(x^2)$ 意味着 $o(x^2)\cap o(x^3)\subset o(x^2)$.

4. 无穷小量的等价替换：当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x),\beta(x),\alpha'(x),\beta'(x)$ 均为无穷小量且 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$, $\beta(x)\sim\beta'(x)$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$.

证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}\cdot\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}\cdot\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=A$.

注：仅适用于乘除，不适用于加减

5. 常见的等价无穷小量阶：当 $x\to0$ 时常见的等价无穷小量：

(1) $\sin x\sim x$ (2) $\tan x\sim x$ (3) $\ln(1+x)\sim x$

(4) $e^x-1\sim x$ (5) $\arctan x\sim x$ (6) $\arcsin x\sim x$

(7) $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ (8) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时有 (9) $a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$ (10) $\log_a(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}\sim\frac{x}{\ln a}$

例：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{(e^x-1)\arcsin 2x\,(\sqrt{1+2x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\cdot2x\cdot\frac{1}{2}\cdot2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{2x^3}=\frac{1}{4}$

注：(1) $(1+u)^\alpha-1\sim\alpha u\ (u\to0)$ u仅为记号.

$\sqrt{1+x^4}-1\sim\underline{\underline{\frac{1}{2}x^4}}$

(2) 替换的本质是近似，故不能在加减时替换(不均匀近似).

如 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ 不能将 $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}-1=0$

此时 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ 才等式. (可能近似).

$\alpha(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $\beta(x)=x^2$, $x\to0$ 均为无穷小量

但 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, 与 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin\frac{1}{x}}$ 均不存在.

(令 $x_n=\frac{1}{n\pi}$)

注：$u\to0$ 时 $\sin u\sim u$ 中 u不只是记号.

如 $u=x\sin\frac{1}{x}$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x\sin\frac{1}{x})}{x\sin\frac{1}{x}}$ 不存在 ($x\in U_+(0)$ 时 $x\sin\frac{1}{x}$有无数个零点)

$\therefore U_+(0)$ 内无定义.

并非所有无穷小量都可进行阶的比较

证明: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\overset{e^x-1=u}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha$

例1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+x^5}-1}{x^3}\longrightarrow$ 提出高阶无穷小

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^5}-1}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{4}$

例2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{(e^{x^2}-1)(\sqrt[3]{1-3x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^2(-x)}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{-x^3}=-\frac{1}{2}$

例3. $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{1}{3}=1$

例4. $x\to0$时, $e^{\tan x}-e^{\sin x}\sim\alpha x^n$, 求$\alpha$, n $\longrightarrow$ 构造常见结构

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\alpha x^n}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{\alpha x^n}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\alpha x^n}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\alpha x^n}=\frac{1}{2\alpha}\lim\limits_{x\to0}x^{3-n}=1\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}$, $n=3$.

变式: 求$a^{x^2}-b^{x^2}$ $(x\to0)$ 阶数.

$a^{x^2}-b^{x^2}=b^{x^2}((\frac{a}{b})^{x^2}-1)\sim x^2\ln\frac{a}{b}$ 二阶.

例5. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}\overset{x-a=t}{=\!=\!=}a^a\lim\limits_{t\to0}\frac{e^{t\ln a}-1}{t}=a^a\ln a$

例6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2}\overset{反向替换}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$

例7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x\cos2x\cdots\cos nx-1}{x^2}$

法一. 当$n=2$时 $I_2=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x\cos2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x\cos2x-\cos2x+\cos2x-1}{x^2}$ 添常见结构

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x(\cos x-1)+\cos2x-1}{x^2}=-\frac{5}{2}$

$\therefore I_n=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos nx((\cos x\cdots\cos(n-1)x-1)}{x^2}+\frac{\cos nx-1}{x^2}$

$=I_{n-1}-\frac{1}{2}n^2=-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

法二. 反向替换 $\ln\cos kx\sim\cos kx-1$

$\therefore I_n=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\cos kx}{x^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos kx}{x^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos kx-1}{x^2}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$.

变式 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\prod\limits_{k=2}^{n}\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}=\sum\limits_{k=2}^{n}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{k}\ln\cos kx}{x^2}$

$=\sum\limits_{k=2}^{n}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{k}\dfrac{\cos kx-1}{x^2}=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\left(-\dfrac{k^2}{2}\right)=-\dfrac{(n+2)(n-1)}{4}$

例8. 求 a, b 使得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, & x<0,\\ ax+b, & 0\le x\le 1,\\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, & x>1,\end{cases}$ 在定义区间上连续

$\lim\limits_{x\to0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to0-0}\dfrac{-\frac{1}{2}ax}{x}=-\dfrac{a}{2}$ $\quad\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}(ax+b)=b$

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(ax+b)=a$ $\quad\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\begin{cases}f(0-0)=f(0+0)\\ f(1-0)=f(1+0)\end{cases}\Leftrightarrow a=\pi,\ b=-\dfrac{\pi}{2}$

例9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x^2}=1$ 　指化处理幂指函数

例10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}\xlongequal{x-\frac{\pi}{2}=u}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1-\cos u}{4u^2}=\dfrac{1}{8}$. 换元

例11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$. $(1^\infty$型$)$

先证 $\lim\limits_{n\to0}\dfrac{a^n-1}{n}=\ln a$

法一. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln a}{x}=\ln a$. 由归结原理知 $\lim\limits_{n\to0}\dfrac{a^n-1}{n}=\ln a$.

$u\sim\ln(u+1)$ 法二. $\lim\limits_{n\to0}\dfrac{a^n-1}{n}=\lim\limits_{n\to0}\dfrac{n\ln a}{n}=\ln a$.

$\therefore\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^{n^{-1}}-1}{n^{-1}}=\ln a\ (a>0$ 且 $a\ne1)$

$\therefore I=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{(\sqrt[n]{2}-1)+(\sqrt[n]{3}-1)}{2}\right)^{\frac{2}{(\sqrt[n]{2}-1)+(\sqrt[n]{3}-1)}}\right]^{\frac{n[(\sqrt[n]{2}-1)+(\sqrt[n]{3}-1)]}{2}}=e^{\frac{\ln2+\ln3}{2}}=\sqrt{6}$.

推广: $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n)$.

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}\right)^{\frac{n}{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}}\right]^{\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{nx}}$

$=e^{\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}}=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$

例12. 求 $\sqrt[5]{x^5+2x}-\sqrt[5]{x^5-3x}$ $(x\to+\infty)$ 阶数.

$I=x\left[\left(1+\dfrac{2}{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(1-\dfrac{3}{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}\right]=x\left[\left(\left(1+\dfrac{2}{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right)-\left(\left(1-\dfrac{3}{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right)\right]$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(\sqrt[5]{x^5+2x}-\sqrt[5]{x^5-3x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\left[\left(\left(1+\dfrac{2}{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right)-\left(\left(1-\dfrac{3}{x^4}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right)\right]$

$\xlongequal{\frac{1}{x}=u}\lim\limits_{u\to0+0}\dfrac{\frac{2}{5}u^4-\left(-\frac{3}{5}u^4\right)}{u^4}=1$ $\therefore$ 三阶 $\left(I\sim\dfrac{1}{x^3}\right)$.

§4 闭区间上的连续函数

1. 闭区间上连续函数的性质：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则（记作 $f\in C[a,b]$）

(1) 有界性定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

(2) 最值定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值．即 $\exists\ \xi,\eta\in[a,b]$ s.t. $f(\xi)=\max\limits_{a\le x\le b}f(x)\triangleq M$

$f(\eta)=\min\limits_{a\le x\le b}f(x)\triangleq m$

(3) 零点存在定理：若 $f(a)f(b)<0$．则 $\exists\ \xi\in(a,b)$ s.t. $f(\xi)=0$．

(4) 介值定理：对 $\forall\, m<\eta<M$．都 $\exists\ x\in[a,b]$ s.t. $f(x)=\eta$．其中 M,m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值和最小值

(5) Cantor 定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

注：若 f 在 $[a,b]$ 有 n 阶连续导数可记为 $f\in C^n[a,b]$

（f 在 $[a,b]$ 上有连续导数的意思是：f 在 $[a,b]$ 上的导函数连续）

证明：（有界性定理）设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界．

法一 反证法＋致密性：假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则 $\forall M>0$．$\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $|f(x_0)|\ge M$．

取 $M_1=1$．则 $\exists\, x_1\in[a,b]$．s.t. $|f(x_1)|\ge1$．

取 $M_2=2$．则 $\exists\, x_2\in[a,b]$ s.t. $|f(x_2)|\ge2$．…

取 $M_n=n$．则 $\exists\, x_n\in[a,b]$．s.t. $|f(x_n)|\ge n$

由此得到 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\in[a,b]$．但 $|f(x_n)|\ge n$．

根据 Weierstrass 致密性定理．$\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$

令 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$．$\because x_{n_k}\in[a,b]$．$\therefore x_0\in[a,b]$

$\because |f(x_{n_k})|\ge n_k$ $\therefore \lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k})|=+\infty$

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\therefore \lim\limits_{k\to+\infty}|f(x_{n_k})|=|f(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k})|=|f(x_0)|$ 矛盾

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界．

注：无穷大量 $\subset$ 无界．如 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ $(x\in(0,1))$ $\because x_n=\frac{1}{2n\pi}\in(0,1)$ $f(x_n)=0$ $\therefore$ 不是无穷大量

$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1)$ $f(y_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$

法二：有限覆盖定理（连续 $\Rightarrow$ 邻域连续 $\xrightarrow{\text{有限覆盖}}$ 有限区间连续 $\Rightarrow$ 取min, max作公共界）

$\because f(x)$在$[a,b]$上连续 $\therefore \forall x_0\in[a,b]$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x\in U(x_0,\delta)$, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\therefore f(x)$在$U(x_0,\delta)$上连续.

又 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{x_0\in[a,b]}U(x_0,\delta_{x_0})$ $\therefore$由有限覆盖定理知 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}U(x_k,\delta_{x_k})\supset[a,b]$

又 $\forall x\in U(x_k,\delta_{x_k})$, $|f(x_k)-f(x)|<\varepsilon_k \Rightarrow f(x_k)-\varepsilon_k<f(x)<f(x_k)+\varepsilon_k$ $\therefore \exists \min\limits_{1\le k\le n} f(x_k)-\varepsilon_k=m$, $\max\limits_{1\le k\le n} f(x_k)+\varepsilon_k=M$

$\therefore |f(x)|\le\max\{|m|,|M|\}$ 即$f(x)$有界.

（最值定理）设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，则：$f(x)$在$[a,b]$上存在最大值和最小值

即 $\exists\xi,\eta\in[a,b]$ s.t. $f(\xi)=\max\limits_{a\le x\le b}f(x)\triangleq M$, $f(\eta)=\min\limits_{a\le x\le b}f(x)\triangleq m$

$\because f(x)$在$[a,b]$连续 $\therefore f(x)$在$[a,b]$有界 $\therefore f(x)$在$[a,b]$有上确界

记 $M=\sup\limits_{a\le x\le b}f(x)$ 则对 $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\le M$.

法一：若$f(x)$在$[a,b]$上不存在最大值，则$\forall x\in[a,b]$, $\underline{f(x)<M}$.

构造 令 $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$ 则 $g(x)>0$ 且在$[a,b]$上连续，故$g(x)$在$[a,b]$上有界

$\therefore \exists A>0$, $\forall x\in[a,b]$, $0<g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}<A \Rightarrow \underline{f(x)<M-\dfrac{1}{A}}$ 与$M=\sup f(x)$矛盾.

$\therefore f(x)$在$[a,b]$上存在最大值，同理，$f(x)$在$[a,b]$上存在最小值.

法二：$\because \underline{\forall\varepsilon>0}$, $\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $M-\varepsilon<f(x_0)\le M$.

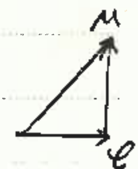
（证明$f(x)$能取到M） 取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$, $\therefore \exists x_n\in[a,b]$, s.t. $M-\dfrac{1}{n}<f(x_n)\le M$.

又 $x_n\in[a,b]$ $\therefore$ ∃收敛子列$\{x_{n_k}\}$，令 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$. ($\xi\in[a,b]$).

又$f(x)$在$x=\xi$处连续 $\therefore \lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k})=f(\xi)$

又 $M-\dfrac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\le M \xRightarrow{\text{夹逼}} \lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=M \Rightarrow M=f(\xi)$

即$f(x)$在$x=\xi$处有最大值，同理$f(x)$在$[a,b]$上存在最小值.



$x_k\to\xi$
$f(x_{n_k})\to M$
连续 $f(x_{n_k})\to f(\xi)$
$\Rightarrow M=f(\xi)$

法三：思路：$S=\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$有界 $\Rightarrow M=\sup S$

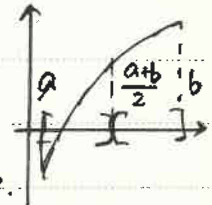
假设 $M\ne\max\{S\}$ $\therefore \exists x_n\in[a,b]$, $f(x_n)\to M$

又 $\exists x_{n_k} \to \xi$ $\therefore f(x_{n_k}) \to f(\xi) = M$ 矛盾

(闭区间上连续函数的零点存在定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f(\xi)=0$.

法一：闭区间套定理.

构造区间套：取 $a_1, b_1 \in [a,b]$，$f(a_1)f(b_1)<0$.



构造 $[a_2,b_2]$：$\begin{cases} [a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}], & f(a_1)f(\frac{a_1+b_1}{2})<0 \\ [a_2,b_2]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1], & f(b_1)f(\frac{a_1+b_1}{2})<0 \end{cases}$

依次可得 $[a_n,b_n]$：$\begin{cases} [a_n,b_n]=[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}], & f(a_{n-1})f(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2})<0 \\ [a_n,b_n]=[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}], & f(b_{n-1})f(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2})<0 \end{cases}$

由此得到一个闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ s.t.

① $f(a_n)f(b_n)<0$. ② $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ ③ $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1)$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

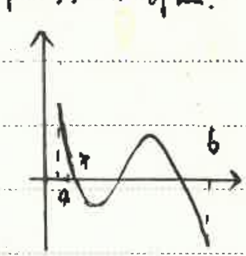
$\therefore \{[a_n,b_n]\}$ 为闭区间套，从而 $\exists$ 唯一 $\xi\in[a_n,b_n]$ $(\xi\in(a,b))$

$\therefore$ 下证 $f(\xi)=0$. 不妨设 $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(\xi) \le 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = f(\xi) \ge 0$ $\therefore f(\xi)=0$. 得证.

法二：构造+确界原理



不妨设 $f(a)>0$，则 $f(b)<0$.

记 $S=\{x \mid t\in[a,x], f(t)>0, a\le x\le b\} \ne \varnothing$ 且 S 有界.

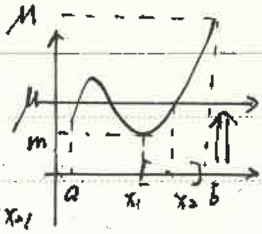
令 $\sup S = \xi$. 下证 $f(\xi)=0$.

假设 $f(\xi)>0$ $\because f(x)$ 在 $x=\xi$ 处连续 $\therefore \exists \delta_1>0$, $\forall x\in(\xi-\delta_1, \xi+\delta_1)$, $f(x)>0$

取 $x=\xi+\frac{\delta_1}{2}$ $\therefore f(\xi+\frac{\delta_1}{2})>0$ $\therefore \xi+\frac{\delta_1}{2}\in S$ 与 $\sup S=\xi$ 矛盾.

同理可证 $f(\xi)<0$ 不成立. 故 $f(\xi)=0$.

(介值定理) 对 $\forall m<\mu<M$, $\exists x\in[a,b]$ s.t. $f(x)=\mu$.



证明: 平移法. 构造 $g(x)=f(x)-\mu$

∵由最值定理知, $\exists\, f(x_1)=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $f(x_2)=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $(x_1<x_2)$

∴$g(x_1)=m-\mu<0$, $g(x_2)=M-\mu>0$

∴由零点存在定理知, $\exists\, x_0\in(x_1,x_2)$, $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=\mu$. 得证

注: 任意区间无零点: 保号 (恒正/恒负)

例. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 对 $\forall \alpha_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, 及 $x_i\in[a,b]$. 证明: $\exists\,\xi\in[a,b]$ s.t. $f(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$ ← 加权平均.

∵$f(x)$在$[a,b]$上连续 ∴ $f(x)$在$[a,b]$上有最大值M和最小值m

而$x_i\in[a,b]$ ∴ $m\le f(x_i)\le M$ 又 $\alpha_i>0$ ∴ $\alpha_i m\le \alpha_i f(x_i)\le \alpha_i M$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i m\le \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\le \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i M \Rightarrow m\le \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\le M$

∴根据连续函数的介值定理, $\exists\,\xi\in[a,b]$, s.t. $f(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$.

注: 特别地, 取 $\alpha_i=\frac{1}{n}$, 则 $\exists\,\xi\in[a,b]$ s.t. $f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$

例. 百米比赛跑10s. 证明: 某1s跑10米.

建立模型: 设 $S=S(t)$, $t\in[0,10]$, 则 $S(t)$ 为 $[0,10]$ 上连续函数, $S(0)=0$, $S(10)=100$.

考虑 $f(t)=S(t+1)-S(t)$, $f(t)$ 为 $[0,9]$ 上连续函数.

法一. 假设不存在某1s恰好跑10m, 则 $f(t)-10=0$ 在 $[0,9]$ 内无解.

即 $f(t)-10$ 无零点 (保号)

∴对 $\forall t\in[0,9]$, 均有 $f(t)-10>0$ (或 $f(t)-10<0$)

然而 $\sum\limits_{k=0}^{9}[f(k)-10]=S(10)-S(0)-100>0$ 矛盾.

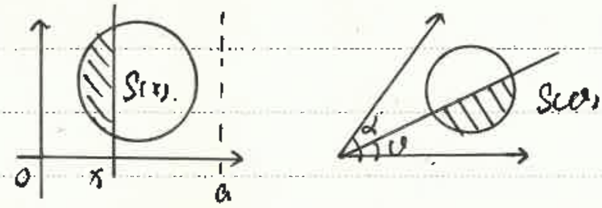
法二. ∵ $\frac{1}{10}\sum\limits_{k=0}^{9}f(k)=\frac{1}{10}[S(10)-S(0)]=10$.

∴由连续函数介值性定理, $\exists\, t_0\in[0,9]$ s.t. $f(t_0)=10$.

即 $S(t_0+1)-S(t_0)=10$

例3. ∃无数种切法将圆饼切成面积相等两份.

建立模型:



由介值定理知, $\exists x_0 \in [0, a]$ ($\alpha_0 \in [0, \alpha]$), s.t. $S(x_0) = \frac{1}{2}S(a)$, ($S(\alpha_0) = \frac{1}{2}S(\alpha)$)

又方向可任意选定. $\therefore$ ∃无数种切法.

例4. 证明 $f(x) = e^x + 3x - 5$ 有唯一正根

显然 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续. 且 $f(0) = -4$, $f(1) = e - 2 > 0$.

由零点存在定理知 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有根

又 f 在 $[0, +\infty)$ ↗ $\therefore$ 零点唯一.

注: $0 < a_n < 1$ 推不出 $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^n = 0$. (由于 a_n 可能与 n 有关, 如 $(\frac{n}{n+1})^n \to e^{-1}$.)

$0 < a_n < r < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n)^n = 0$. ($0 < (a_n)^n < r^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n)^n = 0$.) $[1^\infty]$

例5. 设 $f_n(x) = x^n + nx - 2$ ($n \in N^*$) 证明 $f_n(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一正根 a_n. 求 $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^n$.

$\because f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 且 $f(0) = -3$, $f(1) = n - 1 \geq 0$ $\therefore f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有实根.

又 $f_n'(x) = nx^{n-1} + n > 0$ $\therefore f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ ↑. $\therefore$ 实根唯一 且 $a_n \in (0, 1)$. ($n \geq 2$)

当 $n \geq 4$ 时. $f_n(0) = -2 < 0$. $f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} + \frac{n-4}{2} > 0$. $\therefore a_n \in (0, \frac{1}{2})$.

$\therefore \lim_{n\to+\infty} na_n = \lim_{n\to+\infty}(2 - a_n^n) = 2$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}(1+a_n)^n = \lim_{n\to+\infty}[(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}]^{na_n} = e^2$

变式: 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$

证明: $f_n(x) = 1$ 存在一正根 x_n. 求 $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

设 $g_n(x) = f_n(x) - 1 = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$. $\because g_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续 $g_n(0) = -1$ $g_n(1) = n - 1 \geq 0$.

$\therefore \exists x_n \in (0, 1]$ ($n \geq 2$) s.t. $g_n(x_n) = 1$. $\therefore g_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 有实根.

$\therefore 0<x_n<1$.

又 $g_{n+1}(x)=g_n(x)$ $\therefore x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n+1}=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n$

若 $x_{n+1}\geq x_n$ 则 $x_n+\cdots+x_n^n\geq x_n+\cdots+x_n^{n+1}\Leftrightarrow x_n\leq 0$ 矛盾 ①

$\therefore x_{n+1}<x_n$ 由单调收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

$\therefore 1=x_n+\cdots+(x_n)^n=\frac{1-(x_n)^n}{1-x_n}x_n$ ②[无限项不适用]

当 $n=2$ 时 $g(0)=-1$ $\because g(\frac{2}{3})>0$ $\therefore x_n<\frac{2}{3}$

$\therefore \forall n\geq 2$, $0<x_n<\frac{2}{3}$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n=0$ ③ 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$

$\therefore 1=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\alpha\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

例6 证明: $\frac{2}{x-a}+\frac{3}{x-b}+\frac{4}{x-c}=0$ $(a<b<c)$ 存在两个根 x_1,x_2, 且 $a<x_1<b$, $b<x_2<c$.

记 $f(x)=2(x-b)(x-c)+3(x-c)(x-a)+4(x-a)(x-b)$.

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f(c)>0$.

$\therefore f(x)=0$ 在 (a,b) (b,c) 都仅有一个根.

又方程 $\frac{2}{x-a}+\frac{3}{x-b}+\frac{4}{x-c}=0$ 的根与 $f(x)=0$ $(x\neq a, x\neq b, x\neq c)$ 的根一致 (验根)

$\therefore$ 原方程仅有两个根 x_1,x_2, 且 $a<x_1<b$, $b<x_2<c$.

2. 函数的一致连续: 设 f 是定义在区间 D 上的函数, 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 对 $\forall x',x''\in D$, 只要 $|x'-x''|<\delta$,

就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, 则称 f 在区间 D 上一致连续.

设 f 是定义在区间 D 上的函数, 若 $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x',x''\in D$, 且 $|x'-x''|<\delta$,

但 $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$, 则称 f 在 D 上非一致连续.

与连续的区别: $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

上述所得 δ 与 ε, x_0 有关, 即 $\underline{\delta=\delta(\varepsilon,x_0)}$

而对一致连续的函数, 所得 δ 仅依赖于 ε, 即 $\underline{\delta=\delta(\varepsilon)}$

例1 证明 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内非一致连续

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0$, $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0$ （$x=0$处破坏连续性）

例2. 证明 $f(x)=x^2$ 在实轴上非一致连续　　由闭区间一致连续

取 $x_n=\sqrt{n+1}\to+\infty$, $y_n=\sqrt{n}$ （$x\to\infty$时破坏连续性）

（$|x_n-y_n|\to 0$）

例3. 证明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内非一致连续.

由Cantor知, $f(x)$ 在 $[\alpha,1]$ 连续 $(0<\alpha<1)$, 故 $x=0$ 处破坏连续性

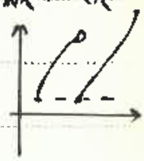
法一: 取 $\varepsilon_0=1$, $\forall\delta>0$ $(\delta<\frac{1}{2})$, $\exists x'=\delta$, $x''=\frac{\delta}{2}$, $|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta$, 但

$|f(x')-f(x'')|=\frac{1}{\delta}>2>\varepsilon_0$. $\therefore f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 非一致连续

法二: $\forall\delta>0$, $\exists N>0$, $\forall n>N$, $\frac{1}{n}<\delta$. 取 $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$

$\therefore |x_n-y_n|=\frac{1}{n(n+1)}<\delta$, $\therefore |f(x_n)-f(y_n)|=1=\varepsilon_0$.

注: (1) 闭区间上连续, 值域一定是闭区间; 连续函数值域为区间, 值域为区间的函数不一定是连续函数



(2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 且 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 存在, 可补充定义

$f(a)=f(a+0)$, $f(b)=f(b-0)$, 即 $g(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a, \\ f(x), & a<x<b, \\ f(b-0), & x=b. \end{cases}$ 这样

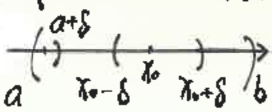
$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 从而 $f(x)$ 在 (a,b) 有界

例. $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 存在.

证明: 必要性. $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续, 则

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

$\therefore f(x)$ 在 (a,b) 内满足Cauchy收敛准则, 故 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 都存在.



$\forall\varepsilon>0$, $|x'-x''|<\delta$, $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$x',x''\in U_+(a,\delta)$

充分性：$f(a+0)$，$f(b-0)$存在，补充定义 $f(a)=f(a+0)$，$f(b)=f(b-0)$。

这样 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在 $x=a$，$x=b$ 处分别右连续，左连续。

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

$\therefore$ $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续。

(3) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界。

3. 函数一致连续的判别：f 在区间 I 上一致连续的充要条件是：对任何满足条件 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 的数列 $\{x_n\}\subseteq I$，$\{y_n\}\subseteq I$，有 $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$。

证明：必要性，假设 f 在 I 上一致连续，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in I$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

由于 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，则

结构一致代入

对 $\forall\delta>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$ 时，$|x_n-y_n|<\delta$，$\therefore |f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$

$\therefore$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$ 时，$|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$。

充分性：$\forall$ 命题：反证法。　　　　$\exists$ 命题：排除偶数值

假设 f 在 I 上不一致连续，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x',y'\in I$ 且 $|x'-y'|<\delta$，但 $|f(x')-f(y')|\geq\varepsilon_0$

取 $\delta_1=1$，则 $\exists x_1,y_1\in I$，且 $|x_1-y_1|<\delta_1$，但 $|f(x_1)-f(y_1)|\geq\varepsilon_0$

取 $\delta_2=\frac{1}{2}$，则 $\exists x_2,y_2\in I$，且 $|x_2-y_2|<\delta_2$，但 $|f(x_2)-f(y_2)|\geq\varepsilon_0$

$\cdots\cdots$

取 $\delta_n=\frac{1}{n}$，则 $\exists x_n,y_n\in I$，且 $|x_n-y_n|<\delta_n$，但 $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$

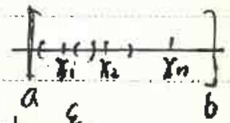
这样便得到数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\in I$，满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但 $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))\neq0$，矛盾

$\therefore$ f 在 I 一致连续

f 在区间 I 上非一致连续的充要条件：$\exists \varepsilon_0>0$，及 $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq I$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，有 $|f(x_n)-f(y_n)|\geq \varepsilon_0$。

4. 闭区间上连续函数的一致连续性：（Cantor 定理）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

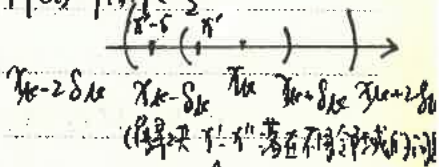


证明：法一：有限覆盖。对 $\forall x\in[a,b]$，由于 $f(x)$ 为连续函数，则

对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_x>0$，当 $t\in(x-\underline{2\delta_x},\ x+\underline{2\delta_x})$ 时，$|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 将 x' 放入

这样就得到一个开区间列：$\{(x-\delta_x, x+\delta_x) \mid x\in[a,b]\}$

覆盖 $[a,b]$



当 $x=a,b$ 时，补充定义 $(a-\delta_a, a)$，$(b, b+\delta_b)$ 上的函数值为 $f(a)$，$f(b)$。

根据有限覆盖定理，$\exists$ 有限覆盖 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}(x_k-\delta_k, x_k+\delta_k)\supset[a,b]$

记 $\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in[a,b]$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，

对 x' 一定存在 $1\leq k\leq n$ s.t. $x'\in(x_k-\delta_k, x_k+\delta_k)$（覆盖）

则 $|f(x')-f(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad$ $\underline{|x''-x_k|}=|x''-x'+x'-x_k|\leq|x''-x'|+|x'-x_k|<\delta+\delta_k\ \underline{\leq 2\delta_k}$

$\therefore |f(x'')-f(x')|\leq \boxed{|f(x')-f(x_k)|}+\boxed{|f(x'')-f(x_k)|}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

法二：反证法。思路：1°. $x_n-y_n\to0$，但 $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$

2°. $x_n, y_n\in[a,b] \Rightarrow x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$

$y_{n_k}=x_{n_k}-(x_{n_k}-y_{n_k})\to x_0$

3°. $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon_0$ 矛盾

$\quad\ \ \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\ \ f(x_0) \qquad\quad f(x_0)$

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x_1,x_2\in[a,b]$，s.t. $|x_1-x_2|<\delta$，

但 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0$

对 $\delta_n=\frac{1}{n}$，$\exists x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\in[a,b]$，s.t. $|x_n^{(1)}-x_n^{(2)}|<\delta_n=\frac{1}{n}$ 但 $|f(x_n^{(1)})-f(x_n^{(2)})|\geq\varepsilon_0$.

对数列 $\{x_n^{(1)}\}$，根据 Werierstrass 致密性定理，存在收敛子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$.

令 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(1)}=x_0\in[a,b]$，又 $|x_{n_k}^{(1)}-x_{n_k}^{(2)}|<\delta_{n_k}=\frac{1}{n_k}$ ∴ $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(2)}=x_0$

由于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 则 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k}^{(1)})=f(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(1)})=f(x_0)$

$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k}^{(2)})=f(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(2)})=f(x_0)$

∴ $\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})|=0$ 这与 $|f(x_n^{(1)})-f(x_n^{(2)})|\geq\varepsilon_0$ 矛盾.

∴ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

法三. 反证法：若 f 在 $[a,b]$ 上非一致连续，则 $\exists\varepsilon_0>0$. 以及区间 $[a,b]$ 上的点列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$.

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 但 $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$ $(n=1,2,\cdots)$

∵ $\{x_n\}$ 有界，由 Werierstrass 致密性定理，存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，记

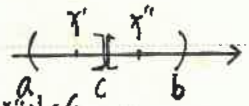
$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in[a,b]$，故 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}[(y_{n_k}-x_{n_k})+x_{n_k}]=x_0$

又 $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon_0$ ∴ $\varepsilon_0\leq\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|=|f(x_0)-f(x_0)|=0$

矛盾. ∴ f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

结论：(1) 设 $f\in C(a,c]$，$f\in C[c,b)$，且一致连续 $\Rightarrow$ f 在 (a,b) 内一致连续

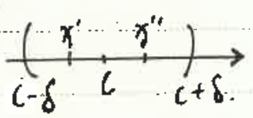
证明：记 $I_1=(a,c]$，$I_2=[c,b)$.



只需证 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时 $(x',x''\in I_1\cup I_2)$，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

∵ f 在 I_1，I_2 内一致连续 ∴ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $|x'-x''|<\delta$ 时

$(x',x''\in I_1$ 或 $x',x''\in I_2)$，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$



(解决 x',x'' 落在不同区间的情况)

∴ 当 $x',x''\in I_1$ 或 $x',x''\in I_2$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

当 $x'\in I_1$ 且 $x''\in I_2$ 时，∵ f 在 $x=c$ 处连续

∴ 对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall t\in U(c,\delta)$ 时，$|f(t)-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$

当 $|x'-x''|<\delta$ 时，$x',x''\in U(c,\delta)$，$x'<c<x''$

$|x'-c|=c-x'<x''-x'<\delta$.

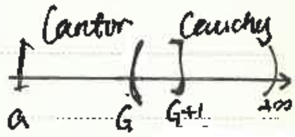
$|x''-c|=x''-c<x''-x'<\delta$.

$\therefore |f(x')-f(x'')| \le |f(x')-f(c)| + |f(x'')-f(c)| < \varepsilon$ （借助$f(c)$）

$\therefore f$在$I_1\cup I_2$一致连续

(2) 设$f\in C[a,+\infty)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$，则$f$在$[a,+\infty)$上一致连续.

证明：对$\forall\varepsilon>0$，$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，$\therefore$由Cauchy收敛准则知



无限开区间拆为 闭+无限开
(Cantor) (Cauchy)

$\exists G>0$，当$x',x''>G$时 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$\because f(x)$在$[a,G+1]$上连续 $\therefore f(x)$在$[a,G+1]$上一致连续

$\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ $(\delta<1)$，当$x',x''\in[a,G+1]$，$|x'-x''|<\delta$，就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

限定x',x''落入两区间

$\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ $(\delta<1)$，当$|x'-x''|<\delta$时，$x',x''\in[a,G+1]$或$x',x''>G$.

$\therefore |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.　　$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续

(3) 设$f\in C(a,+\infty)$，且$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，则$f(x)$在$(a,+\infty)$一致连续.

利用(2)证明

注. (1) 逆命题不成立 如 $f(x)=x$在$\mathbb{R}$上一致连续，但$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在.

$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续 但$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在.

证明：$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,1]$上一致连续

当$x\ge1$时，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，当$|x'-x''|<\delta$时，

$$|f(x')-f(x'')| = |\sqrt{x'}-\sqrt{x''}| = \left|\frac{x'-x''}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\right| < \frac{|x'-x''|}{2} < \frac{\delta}{2} < \varepsilon$$

$\therefore f(x)=\sqrt{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续

$\therefore f(x)=\sqrt{x}$在$[0,1]$，$[1,+\infty)$上一致连续 $\therefore f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续

例. f连续 g不连续 求证 $h(x)=f+g$不连续

反证：$g(x)=(f(x)+g(x))-f(x)$

假设$f+g$连续 则$f+g-f$连续 $\therefore g(x)$连续 矛盾

$\therefore h(x)=f+g$不连续

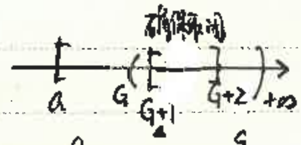
推论：设 f, g 一致连续，则 $f \pm g$ 一致连续，$f \cdot g$ 不一致连续（如 $f: x = x^2$），$f(g(x))$ 一致连续

例 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$。证明：$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续

思路：$|g(x')-g(x'')| = |(g(x')-f(x')) + \overset{\text{联系}}{(f(x')-f(x''))} + (f(x'')-g(x''))| < 3\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ 处理：$[G+1,+\infty) \cup [a,G+2)$ + $\delta<1$ 限制

证明：(1) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内一致连续，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$



(2) ∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ ∴ $\forall \varepsilon>0$，$\exists G>0$，$\forall x>G$，$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

Cauchy $[G+1,+\infty)$

∴ $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $x', x'' \in [G+1,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|g(x')-g(x'')| = |(g(x')-f(x')) + (f(x')-f(x'')) + (f(x'')-g(x''))|$$
$$\le |g(x')-f(x')| + |f(x')-f(x'')| + |f(x'')-g(x'')| < \varepsilon$$

∴ $g(x)$ 在 $[G+1,+\infty)$ 内一致连续

Cantor $[a,G+2]$

(3) $g(x)$ 在 $[a,G+2]$ 上一致连续 ∴ $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|x'-x''|<\delta$ 有 $|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$

$\delta<1$ 取∪

(4) 对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$（$\delta<1$），当 $x', x'' \ge a$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，无论 $x', x'' \in [a,G+2]$ 还是 $x', x'' \in [G+1,+\infty)$，均有 $|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$

∴ $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内一致连续

例 证明 $f(x) = \sin(x^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不一致连续

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，$\exists x_1 = \sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x_2 = \sqrt{2n\pi}$

§1 微分和导数 — §4 复合函数求导法则及其应用

1. 一元函数的微分：设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，若 $\exists$ 常数 $A\in\mathbb{R}$ s.t. $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ $=A\Delta x+o(\Delta x)$ $(\Delta x\to0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微，记作 $dy=A\Delta x$ 或 $dy=Adx$.

由微分定义可知，$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 $f(x_0)+A\Delta x$ 为 $f(x_0+\Delta x)$ 的线性主部.

2. 导数的定义：设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，记作 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f(x)$ 在 x_0 的导数可记作 $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ $\left(y'=\frac{dy}{dx}\right.$ 微分之商）（微商）

特别地，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\ \underline{\underline{\text{若}f(0)=0}}\ \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$

例. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$，求 $f'(0)$.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\lim\limits_{x\to0}x=0=f(\lim\limits_{x\to0}x)=f(0)$.

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2.$

例. $f(x)$ 在 x_0 处可导，求

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=2f'(x_0)$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}\alpha+\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-\beta h)-f(x_0)}{-\beta h}\beta=(\alpha+\beta)f'(x_0)$ $\left(\frac{1}{h^2}\to0+\underline{0}\right)$

注 1) $\lim\limits_{h\to\infty}h\left[f(x_0+\frac{1}{h})-f(x_0)\right]=A\Leftrightarrow f'(x_0)=A$. 而 $\lim\limits_{h\to\infty}h^2\left[f(x_0+\frac{1}{h^2})-f(x_0)\right]=A$ $\Leftrightarrow f'_+(x_0)=A$

2) $f'(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$，$f'_+(x_0)\neq f'(x_0+0)$（$x_0$ 处与附近无关）

如 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x, & x<1\\ 2, & x>1\end{cases}$ $f'(x_0+0)=2$，而 $f(x)$ 不连续，无 $f'(x_0)$

变：$f(x)$ 为偶函数，在 $x=0$ 处可导，证明 $f'(0)=0$.

法一. $2f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ $\therefore 2f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=0$.

法二. $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\xlongequal{x=-u}\lim\limits_{u\to0+0}\frac{f(-u)-f(0)}{-u}=-\lim\limits_{u\to0+0}\frac{f(u)-f(0)}{u}=-f'_+(0)$

而 $f'_-(0)=f'_+(0)$ ∴ $f'(0)=-f'(0)$ 即 $f'(0)=0$.

3. 可导与连续之间的关系：可导一定连续，但连续不一定可导

证明：(1) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

∴ $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot0=0$ ∴ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

(2) 设 $f(x)=|x|$，则 $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\Delta x\to0+0}\frac{|x|}{x}=1$

同样 $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\Delta x\to0-0}\frac{|x|}{x}=-1$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

注：(1) 偶函数奇阶导函数 $x=0$ 时取 0. 奇函数偶阶导函数 $x=0$ 时取 0.

证：$f(-x)=f(x)\Rightarrow(-1)^n f^{(n)}(-x)=f^{(n)}(x)\Rightarrow -f^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)\Rightarrow f^{(n)}(0)=0$.

(2) $\exists f'(0)\Rightarrow f(x)$ 在 $U(0)$ 连续

$\exists f''(0)\Rightarrow f'(x)$ 在 $U(0)$ 连续. $f(x)$ 在 $U(0)$ 可导

$\exists f^{(n)}(0)$（任意阶导数）$\Rightarrow f(x)$ 在 $U(0)$ 有任意阶导数.

例1. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x>0,\\ ax+b, & x\le0.\end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 求 $a.b$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $(f(0+0)=f(0-0))$ 且左右导数相等 $(f'_+(0)=f'_-(0))$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$ $f(0-0)=b$ ∴ $b=\frac{1}{2}$.

分段函数 用定义

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}\xlongequal{分子有理化}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{4}x^2}{x^2(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x)}=-\frac{1}{8}$

$f'_-(0)=a$ ∴ $a=-\frac{1}{8}$

变：$f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续！

$f'(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{x+1}-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}, & x>0,\\ -\frac{1}{8}, & x\le0.\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0+0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{-x^2}{2x^2\sqrt{x+1}\,(2\sqrt{x+1}+x+2)}=-\frac{1}{8}=f'(x-0)$

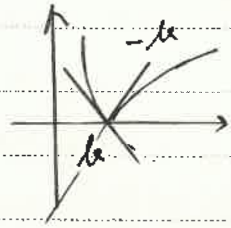
（若使用洛必达 可将非零常数 $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ 提出）.

例2. $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le0,\\ a\sin x+b, & x>0\end{cases}$ 在R上可导 求 $a.b$. 计算 $f'(x)$.

$f(0-0)=1$ $f(0+0)=b$ $\therefore b=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{a\sin x+1-1}{x}=a$

$\therefore a=1.$ $\therefore f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0, \\ \cos x, & x>0. \end{cases}$



例3. 设$f(x)$在x_0处连续，$|f(x)|$在x_0处可导，证明$f(x)$在x_0处可导.

记$g(x)=|f(x)|$.

(1) 若$f(x_0)\ne 0$，不妨设$f(x_0)>0$ $\therefore f(x)$在x_0处连续

$\therefore \exists\delta>0$, $\forall x\in U(x_0,\delta)$, $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$. (局部保号性)

$\therefore$ 当$x\in U(x_0,\delta)$时，有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=g'(x_0)$.

(2) 若$f(x_0)=0$，则 $g'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}$ $+$

而 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|}{x-x_0}\ge 0$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|}{x-x_0}\le 0$ $\therefore g'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=0$ $\therefore f'(x_0)=0$.

4. 常见函数的导数（基本初等函数的导数）

(1) $(C)'=0$ (2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ (3) $(e^x)'=e^x$ (4) $(a^x)'=a^x\ln a$ $(a>0, a$

(5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ (6) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ $(a>0, a\ne 1)$

(7) $(\sin x)'=\cos x$ (8) $(\cos x)'=-\sin x$

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$ (10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$ tan x, sec x 匹配

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$ (12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 非$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$即$\frac{1}{1+x^2}$

(15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ (16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

正正   负

特别记忆：$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x^2\pm a^2})'=\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ $(\sqrt{a^2-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

证明：$(x^\alpha)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\Delta x} = x^\alpha \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}\cdot\alpha}{\Delta x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

$(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x$

$(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$

$(\tan x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\Delta x}{\cos x\cos(x+\Delta x)\Delta x} = \sec^2 x$

$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' = \frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$

$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = a^x\ln a$

5. 导数的四则运算法则：设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均为可导函数，则

(1) $(u\pm v)' = u'\pm v'$ (2) $(uv)' = u'v + uv'$ (3) $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

证明：设 $u=u(x)$，$v=v(x)$，$\Delta u = u(x+\Delta x)-u(x)$，$\Delta v = v(x+\Delta x)-v(x)$

则 $u(x+\Delta x) = u+\Delta u$，$v(x+\Delta x) = v+\Delta v$

$\therefore (uv)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v + \frac{\Delta v}{\Delta x}u + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right) = u'v+uv'$

无穷小量

导数(常数)

常数·无穷小量 可忽略.

$\frac{u}{v} = \frac{1}{v}\cdot u$，$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$

例1. $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-2022)$，求 $f'(0)$.

法一：$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x-1)\cdots(x-2022)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x-1)\cdots(x-2022) = 2022!$

法二：令 $g(x) = \prod\limits_{i=1}^{2022}(x-i)$，$\therefore f(x) = xg(x) \Rightarrow f'(x) = xg'(x)+g(x)$

$\therefore f'(0) = g(0) = 2022!$

例2. $f(x) = \frac{(x-1)\cdots(x-1011)}{(x-1012)\cdots(x-2022)}$，求 $f'(1)$.

法一：$f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-2)\cdots(x-1011)}{(x-1012)\cdots(x-2022)} = \frac{\prod\limits_{i=-1010}^{-1} i}{\prod\limits_{i=-2021}^{-1011} i}$

法二：令 $g(x) = \frac{(x-2)\cdots(x-1011)}{(x-1012)\cdots(x-2022)}$

例3. $f(x) = (e^x-1)(e^x-2)\cdots(e^x-2022)$，求 $f'(0)$.

法一：$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(e^x-2)\cdots(e^x-2022) = -2021!$

法二 令 $g(x)=\prod_{i=2}^{2022}(e^x-i)$ ∴ $f(x)=(e^x-1)g(x)$

$f'(x)=(e^x-1)g'(x)+e^xg(x)$ ∴ $f'(0)=g(0)=-2021!$

6.反函数的求导法则：设 $y=f(x)$ 可导且严格单调，其反函数为 $x=g(y)$ 则 $x=g(y)$ 可导且 $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$

或 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ $(f'(x)\neq0)$

证明：思路：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$g'(y)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$

问题：1. $\Delta x\to0 \Leftrightarrow \Delta y\to0$ 2. $\Delta y\neq0 \Leftrightarrow \Delta x\neq0$

(1) ∵ $y=f(x)$ 可导 ∴ $y=f(x)$ 连续 ∴ $x=g(y)$ 也连续

∴ 当 $\Delta x\to0$ 时 $\Delta y\to0$ 同样当 $\Delta y\to0$ 时 $\Delta x\to0$

(2) ∵ $f(x)$ 严格单调 ∴ 反函数 $g(y)$ 严格单调

∴ 当 $\Delta x\neq0$ 时 $\Delta y\neq0$ 当 $\Delta y\neq0$ 时 $\Delta x\neq0$

∴ $g'(y)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$

例：$y=\arcsin x \Rightarrow x=\sin y$

∴ $(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\arctan x \Rightarrow x=\tan y$

∴ $(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'_y}=\frac{1}{\sec^2y}=\frac{1}{1+\tan^2y}=\frac{1}{1+x^2}$

7.复合函数的求导法则：设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 且 f、g 均为可导函数，则 $y=f(g(x))$ 也可导且

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 即 $y'=(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ （注：$\underset{\text{对}x\text{求导}}{(f(g(x)))'}\neq\underset{\text{对}g(x)\text{求导}}{f'(g(x))}$）

∵ $y=f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处可导，则

$f'(u_0)=\lim\limits_{\Delta u\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha(\Delta u)$

∴ 当 $\Delta u\neq0$ 时有 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u$， 当 $\Delta u\to0$ 时 $\alpha(\Delta u)\to0$

当 $\Delta x\neq0$ 时 $\Delta u=u-u_0=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$ 有可能等于0 而当 $u=u_0$ 时 $\Delta y=f(u)-f(u_0)$

仍然成立. 但需对 $\alpha(\Delta u)$ 作补充定义:

$$\alpha(\Delta u)=\begin{cases}\dfrac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}-f'(u_0), & (u\neq u_0)\\ 0, & (u=u_0).\end{cases}$$

这样,无论 Δu 是否等于0. $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u$ 都成立

又 $u=g(x)$ 在 x_0 处可导. 故当 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta u\to 0$.

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(u_0)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u}{\Delta x}=f'(u_0)\,g'(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0)$

例1. 计算导数: $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$. $\quad y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}\quad (a>0)$.

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}=\sqrt{a^2-x^2}$$

例2. $f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 当 α 取何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?可导?导函数连续?

范围缩小

无穷小 有界量

(1) 当 $\alpha>0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

($\alpha=0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. $\alpha<0$ 时 $|x|^{\alpha}\to+\infty$)

(2) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}\ \overset{\text{若}\alpha>1}{=\!=}\ 0$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{(-x)^{\alpha}\sin\frac{1}{x}-0}{x}=-\lim\limits_{x\to 0-0}(-x)^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}\ \overset{\text{若}\alpha>1}{=\!=}\ 0$ $\quad\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(3) 当 $\alpha>1$ 时 $f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\alpha(-x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-(-x)^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0+0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}\right)=-\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}\ \overset{\alpha>2}{=\!=}\ 0$

同理 $\alpha>2$ 时 $\lim\limits_{x\to 0-0}f'(x)=0$ $\quad\therefore$ 当 $\alpha>2$ 时 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

注: 由此可得 $f'(x_0)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不一定相等 (条件: 原函数连续 导函数极限存在)

该点性质 邻域性质

$f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0+0)$，$f'_-(x_0)$ 与 $f'(x_0-0)$ 也不一定相等

例3. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

(1) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

(2) 当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 但 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在（$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在）

$\therefore f'(0)\neq\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$

例4. $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x\ (x<0)$ 求 y'. 保证 $\arcsin e^x$ 有意义.

$y'=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+e^x\frac{-2e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}+\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$

例5. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f(x_0)\neq 0$，计算 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right)^{\frac{1}{h}}$ （1^∞ 型）

$I=\lim\limits_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}\right)^{\frac{f(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}}\right]^{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\frac{1}{f(x_0)}}=\exp\left(\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right)$

例6. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+e^{2x} & x<0 \\ ax+b, & x\geq 0 \end{cases}$ 求常数 a,b，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2\sin\frac{1}{x}+e^{2x})=1$，$f(0+0)=b$ $\therefore b=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+e^{2x}-1}{x}=2$ $\quad f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax+1-1}{x}=a$ $\therefore a=2$

8. 幂指函数的导数：$y=u(x)^{v(x)}$ 化作 $y=e^{v(x)\ln u(x)}$ 计算，有

$y'=e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

$=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

例1. $y=(1+\frac{1}{x})^x\ (x>0)$，求 $\frac{dy}{dx}$

$y=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$ $\quad\therefore y'=(1+\frac{1}{x})^x\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right)$

再：证明 y 在 $(0,+\infty)\nearrow$.

$\because \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\ (x>0)$ $\therefore \ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}>0$ $\therefore y'>0$

例2. 求导：(1) $y=x^{\sin x}+(\ln x)^x\ (x>1)$ (2) $y=\arctan\frac{x-1}{x+1}$

$-\infty$去心邻域 $+\infty$去心邻域

$y' = e^{\sin x\ln x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right) + e^{x\ln\ln x}\left(\ln\ln x + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right)$

$= x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right) + (\ln x)^x\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)$

$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2}$ (导数相等，相差常数)

结论: $\arctan x - \arctan\frac{x-1}{x+1} = \begin{cases}\frac{\pi}{4}, & x>-1\\ -\frac{3}{4}\pi, & x<-1\end{cases}$ ($\arctan\frac{x-1}{x+1}$ 在 $x=-1$ 处不连续)

例. $f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在一阶连续导数

$\lim_{x\to0} f(x)=0$. $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\arctan\frac{1}{|x|}=\frac{\pi}{2}$

$f'(x)=\begin{cases} -\arctan\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}, & x<0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0\\ \arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}, & x>0\end{cases}$ $\lim_{x\to0^-}f'(x)=\frac{\pi}{2}$. $\lim_{x\to0^+}f'(x)=\frac{\pi}{2}$ ∴ $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

例. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$. $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导 ⟺ ____

⇒ $\varphi(x)$ 在 $U(a)$ 有定义 (不一定在 $U(a)$ 内有极限 不一定可导)

解: $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}$ $f'_+(a)=\varphi(a)$ $f'_-(a)=-\varphi(a)$ ∴ $\varphi(a)=0$

例. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上有定义. $\forall x,y\in\mathbb{R}$. $\exists L>0\ \alpha>0$ s.t. $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|^\alpha$.

求证. (1) $f\in C(\mathbb{R})$ (2) $\alpha>1$ 时 $f(x)\equiv C$.

(1) 固定变量 y. $-L|x-y|^\alpha+f(y)\le f(x)\le L|x-y|^\alpha+f(y)$

$\lim_{x\to y}f(x)=f(y)$ ∴ $f\in C(\mathbb{R})$

又 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta=\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. $\forall x',x''\in\mathbb{R}$. $|x'-x''|<\delta$ 有 $|f(x')-f(x'')|\le L\delta^\alpha=\varepsilon$

∴ f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续

(2) $f(x)\equiv C$ ⟸ $f'(x)=0$. $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\le L|x-y|^{\alpha-1}$ $(\alpha-1>0)$ ∴ $|f'(x)|\le0$ ⟸ $f'(x)=0$ 即证.

变式. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 满足 Lipschitz 条件 即 $\exists L>0$. $\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$ $|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$.

证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 有界且一致连续 $(a>0)$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(a)}{x}=0 \Rightarrow \exists G>0.\ \forall x>G.\ \left|\frac{f(a)}{x}\right|\le1$. $\forall x>G.\ \left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\frac{f(x)-f(a)}{x}+\frac{f(a)}{x}\right|\le\left|\frac{f(x)-f(a)}{x}\right|+\left|\frac{f(a)}{x}\right|$

$=\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{x}\right|+\left|\frac{f(a)}{x}\right|\le L+1$ 又 $\underbrace{f(x)\text{在}[a,+\infty)\text{一致连续}}_{\text{(Lipschitz条件)}}$ 而 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a,G]$ 连续 ∴ $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a,G]$ 有界

(⟸ f 连续 ⟸ 一致连续)

∴ $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 有界

§5 高阶导数和高阶微分

1. 高阶导数 记号：$y'=\frac{dy}{dx}=f'(x)$ $y''=(y')'=\frac{dy'}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d^2y}{dx^2}$

$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\frac{d}{dx}(\frac{d^ny}{dx^n})$ $y^{(n+1)}=(y^{(n)})'$

注：$d^2x=0$

例1. 已知 $y=f(x)$ 有三阶导，反函数 $x=g(y)$，用 y', y'', y''' 表示 $\frac{d^2x}{dy^2}$，$\frac{d^3x}{dy^3}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'}$，$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dy}(\frac{1}{y'})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{y'})\cdot\frac{dx}{dy}$

$=\frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$

$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}(\frac{d^2x}{dy^2})=\frac{d}{dx}(\frac{d^2x}{dy^2})\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dx}(-\frac{y''}{(y')^3})\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$

例2. $y=\sin x$. $\frac{dy}{d(x^3)}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{d(x^3)}{dx}}=\frac{\cos x}{3x^2}$

2. 常见函数的高阶导数

(1) $(e^x)^{(n)}=e^x$ (2) $((x+1)^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(x+1)^{\alpha-n}$

(3) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{\pi}{2}\cdot n)$ (4) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{\pi}{2}\cdot n)$

(5) $(\ln(1+x))^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$ (6) $(\frac{1}{x+1})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

(7) $(\frac{1}{\sqrt{1+x}})^{(n)}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}$

(8) $(\sqrt{1+x})^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$ $(n\geq 2)$

例 $(\frac{x}{\sqrt{1+x}})^{(n)}=(\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}})^{(n)}=(\sqrt{x+1})^{(n)}-(\frac{1}{\sqrt{x+1}})^{(n)}$

注. $(\sin x)'=\cos x=\sin(\underbrace{x+\frac{\pi}{2}}_{u})$ $(\sin x)''=(\sin u)'=\sin(u+\frac{\pi}{2})\cdot u'=\sin(x+\frac{\pi}{2}\times 2)$

变：1. $\sin(ax+b)^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\frac{\pi}{2}\cdot n)$

2. $(\cos x^2)^{(n)}=[\frac{1}{2}(\cos 2x+1)]^{(n)}=\frac{1}{2}2^n\cos(2x+\frac{\pi}{2}\cdot n)$

3. 高阶导数的 Leibniz 公式：设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均 n 阶可导，则

$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$ $(u^{(0)}(x)=u(x))$

利用 f 一致连续

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta>0$ ($\delta<1$) 当 $|x_1-x_2|<\delta$，且 $x_1>G+1$ $(x_2>G)$ 时，

$\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right|=\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1}+\frac{x_2-x_1}{x_1}\cdot\frac{f(x_2)}{x_2}\right|\leq\varepsilon+\frac{\delta}{G}(l+1)<2\varepsilon$ $\therefore\frac{f(x)}{x}$ 在 $[G+1,+\infty)$ 一致连续

而 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a,G+2]$ 一致连续 $\therefore\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，$(uv)^{(1)}=u'v+uv'$

(2) 假设 n 时成立，则 $n+1$ 时

$$(uv)^{(n+1)}=\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}\right]'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(u^{(k+1)}v^{(n-k)}+u^{(k)}v^{(n-k+1)}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{\overset{[1,n+1]}{(k+1)}}v^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{\overset{[0,n]}{(k)}}v^{(n+1-k)}$$

配对

$$=\sum_{k=1}^{n}C_n^{k-1}u^{(k)}v^{(n-k+1)}+u^{(n+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n+1-k)}+u^{(0)}v^{(n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(C_n^{k-1}+C_n^k)u^{(k)}v^{(n+1-k)}+u^{(n+1)}v^{(0)}+u^{(0)}v^{(n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k u^{(k)}v^{(n+1-k)}+u^{(n+1)}v^{(0)}+u^{(0)}v^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k u^{(k)}v^{(n+1-k)}$$

例1. $f(x)=x^2e^{-2x}$，求 $f^{(2022)}(0)$.

$$f^{(n)}(x)=C_n^0x^2(e^{-2x})^{(n)}+C_n^1(x^2)'(e^{-2x})^{(n-1)}+C_n^2(x^2)''(e^{-2x})^{(n-2)}$$

$$=(-2)^nx^2e^{-2x}+2x(-2)^{n-1}nxe^{-2x}+n(n-1)(-2)^{n-2}e^{-2x}$$

$$\therefore f^{(2022)}(0)=2022\times2021\times2^{2020}$$

例2. $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow(1+x^2)f'(x)=1$$

两边求 $n-1$ 阶导得：$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=0$

令 $x=0$ $\therefore f^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)=0$.

$\therefore f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$ （递推）

又 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ $\therefore f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{为偶数}\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{为奇数}\end{cases}$

例3. $f(x)=\arcsin x$，求 $f^{(n)}(0)$.

记 $y=\arcsin x$，$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y'\sqrt{1-x^2}=1$（无法使用 Leibniz 公式）

相同结构

$y''=\frac{x}{1-x^2}\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{1}{1-x^2}\cdot xy' \quad \therefore (1-x^2)y''=xy'$

两边同时对 x 求 $n-2$ 阶导数得:

$(1-x^2)y^{(n)}+C_{n-2}^1(-2x)y^{(n-1)}-2C_{n-2}^2y^{(n-2)}=xy^{(n-1)}+C_{n-2}^1y^{(n-2)}$

$\therefore y^{(n)}(0)=(n-2)^2y^{(n-2)}(0) \quad (n\geq 2)$

又 $y(0)=0 \quad y'(0)=1 \therefore y^{(2n)}(0)=0 \quad y^{(2n+1)}(0)=[(2n-1)!!]^2 \ (n\geq 1)$

变式: $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 求 $f^{(n)}(0)$

$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad y''=-\frac{x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{1+x^2}xy' \quad \therefore (1+x^2)y''=-xy'$ 同上

例4. $f(x)=\frac{1}{x^2-8x+15}$. 求 $f^{(n)}(0)$

$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}\right)$

$\therefore f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-5)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}\right) \quad \therefore f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2}\times(3^{-n-1}-5^{-n-1})$

变式 $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$. 求 $f^{(n)}(0)$

法一. 求根 令 $x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$

法二. $f(x)(x^2+x+1)=1$. 两边同时求 n 阶导数得

$(x^2+x+1)f^{(n)}(x)+C_n^1(2x+1)f^{(n-1)}(x)+2C_n^2f^{(n-2)}(x)\equiv 0$. (递推)

例5. $f(x)=e^x\cos x$ 求 $f^{(2022)}(x)$

法一. 找规律 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^x\overset{\text{配成}f}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\underline{e^{x+\frac{\pi}{4}}\cos(x+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\underline{f(x+\frac{\pi}{4})}$

下用数归证明 $f^{(n)}(x)=(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}})^nf(x+\frac{n}{4}\pi)=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos(x+\frac{n}{4}\pi)$

则 $f^{(n+1)}(x)=[(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}})^nf(x+\frac{n}{4}\pi)]'=(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}})^n(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}})f(x+\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4})$

$=(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}})^{n+1}f(x+\frac{n+1}{4}\pi)$

$\therefore n+1$ 时结论依然成立. $\therefore f^{(2022)}=-2^{1011}e^x\sin x$

法二. 欧拉公式. $e^{(1+i)x}=e^x\underline{e^{ix}}=\underline{e^x(\cos x+i\sin x)}$

两边求 n 阶导得 $(1+i)^ne^{(1+i)x}=(e^x\cos x)^{(n)}+i(e^x\sin x)^{(n)}$

$\therefore (e^x\cos x)^{(n)} = \mathrm{Re}\,(1+i)^n e^{(1+i)x}$

$(1+i)^n e^{(1+i)x} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^{x+(\frac{n}{4}\pi+x)i}$

$= 2^{\frac{n}{2}} e^x(\cos(\frac{n}{4}\pi+x) + i\sin(\frac{n}{4}\pi+x))$

$\therefore \mathrm{Re}\,(1+i)^n e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos(\frac{n}{4}\pi+x)$

4. 隐函数的导数. 由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ s.t. $F(x,y(x))=0$.

由此确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

隐函数导数计算: (1). 等式两边同时对 x 求导. (2). y 及 y' 等始终是中间变量. (关于 x 的函数)

如: $(y^2)'=2yy'$. $(\sin y)'=\cos y\cdot y'$ $(e^{y^2})'=e^{y^2}\cdot 2yy' = 2yy'e^{y^2}$

例1. $y=y(x)$ 由 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1}$.

两边对 x 求导. $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0 \Leftrightarrow x^2+y^2y'-1+y'=0$

$\therefore y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}$. 又 $x=1$ 时, $y=1$. 故 $y'(1)=0$.

两边对 x 求导. $2x+2y(y')^2+y^2y''+y''=0$ 则 $y''=-\frac{2x+2y(y')^2}{1+y^2} \Rightarrow y''(1)=-1$.

对极值讨论: 驻点 $x=\pm1$. $x=-1$ 极小 $x=1$ 极大.

例2. $y=y(x)$ 由 $xy+x^2+y^3+e^{xy}=0$ 确定. 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

两边对 x 求导. $y+xy'+2x+3y^2y'+e^{xy}(xy'+y)=0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y+ye^{xy}}{x+3y^2+xe^{xy}}$ 又当 $x=0$ 时. $y=-1$ $\therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{2}{3}$.

两边对 x 求导. $y'+(xy''+y')+2+6y(y')^2+3y^2y''+e^{xy}(xy''+y'+y')+e^{xy}(xy'+y)^2=0$

将 $x=0$, $y=-1$, $y'(0)=\frac{2}{3}$ 代入得 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=-1$.

例3. $y=y(x)$ 由 $e^{x+y}-xy-e=0$ 确定 求 $y=y(x)$ 在 $(0,1)$ 处切线方程.

两边对 x 求导. $e^{x+y}(1+y')-(xy'+y)=0$ $\therefore y'(0)=\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}\Big|_{(0,1)}=\frac{1-e}{e}$

$\therefore l: y=\frac{1-e}{e}x+1$

5. 对数求导法.

例1. $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$ 求 $\frac{dy}{dx}$.

法一: $y=e^{\sin x\cdot\ln x}$ ∴ $y'=e^{\sin x\cdot\ln x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

法二: $\ln y=\sin x\ln x$. 两边同时对x求导. $\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$

$\Leftrightarrow$ $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

例2. 求 $y=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+2)^{x-1}x^{1/3}}$ $(x>1)$ 导数.

两边取对数: $\ln y=2\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-(x-1)\ln(x+2)-\frac{1}{3}\ln x$

两边同时对x求导: $\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x-1}{x+2}-\ln(x+2)-\frac{1}{3x}$

∴ $y'=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+2)^{x-1}x^{1/3}}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x-1}{x+2}-\ln(x+2)-\frac{1}{3x}\right)$.

6. 参数方程的导数. 设 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 且$x(t)$, $y(t)$均可导且$x'(t)\neq0$. 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

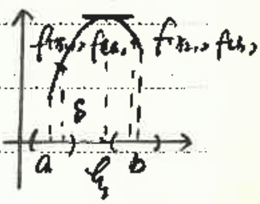
$\frac{dy}{dx}=\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{y\text{关于}t\text{的函数}}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$ ↑反函数 $\left(\begin{cases}x=f(t),\ x'(t)\neq0\Rightarrow t=f^{-1}(x)\\y=g(t)\end{cases}\xleftarrow{\text{代入}}\Rightarrow y=g(f^{-1}(x))\right)$

计算 $\frac{d^2y}{dx^2}$, 实际是对 $\begin{cases}x=x(t)\to t\text{求导}\\y'=\frac{y'(t)}{x'(t)}\to\text{求导数}\end{cases}$ 再求导. ∴ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}$

注: $x'(t)\neq0$ ⇒ $x(t)$保号 ⇒ x单调, 一个t对应一个x ($x(t)$存在).

Darboux定理: 设f在$[a,b]$上可导 且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$. $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

证明: 不妨设 $f'_+(a)>0$, $f'_-(b)<0$. 而



$f'_+(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ 根据函数极限保号性.

$\exists\delta_1>0$, $\forall x\in(a,a+\delta_1)$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$. 特别地 $f(a+\frac{\delta_1}{2})>f(a)$

同理, $\exists\delta_2>0$, $f(b-\frac{\delta_2}{2})>f(b)$ (最值不在端点取得)

又$f(x)$在$[a,b]$上连续 ∴ $f(x)$在$[a,b]$上存在最大值,最小值.

由上知 $f(x)_{max}$ 在(a,b)内取得. 不妨设$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f(\xi)=\max_{a\le x\le b}f(x)$. ∴ $f(\xi)\ge f(x)$

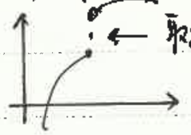
∴ $f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi+0}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\le0$, $f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi-0}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\ge0$ ∴ $f'(\xi)=0$ 得证

推广：导函数的介值性. 即 设f在$[a,b]$上可导 且$(f'_+(a)-\eta)(f'_-(b)-\eta)<0$. $\exists \xi\in(a,b)$.
s.t. $f'(\xi)=\eta$.

思路：构造 $g(x)=f(x)-\eta x$. 对$g(x)$应用Darboux定理

注：不直接构造$g'(x)=f'(x)-\eta$. 因$f'(x)$不具备连续性无法作为研究对象.

例. 证明：具有间断点的函数不存在原函数.



思路 与导函数的介值性矛盾

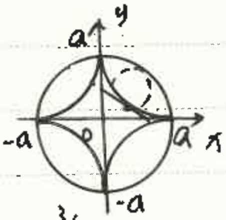
例1. $\begin{cases} x=\pi-\arctan t \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 求$\frac{dy}{dx}$. $\frac{d^2y}{dx^2}$

$y=\ln\sqrt{1+t^2} \xlongequal{\text{简化}} \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{t}{1+t^2}}{-\frac{1}{1+t^2}}=-t \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1}{-\frac{1}{1+t^2}}=t^2+1$$

例2. 证明：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,(a>0)$上任意点处切线被坐标轴所截的弦长为常数.

法一. 参数方程：$[(\frac{x}{a})^{\frac{1}{3}}]^2+[(\frac{y}{a})^{\frac{1}{3}}]^2=1$



$\therefore C:\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 设$P(x_0,y_0)$处切线斜率为k. $P(a\cos^3 t_0, a\sin^3 t_0)$

$k=\frac{dy}{dx}=-\tan t_0$ $\quad l: y-a\sin^3 t_0=-\tan t_0(x-a\cos^3 t_0)$

交点 $A(a\cos t_0,0)$, $B(0,a\sin t_0)$ $\therefore AB=a$.

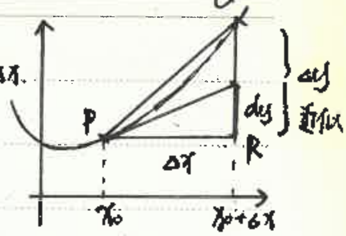
法二. 隐函数求导：$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$ $\therefore y'=-(\frac{y}{x})^{\frac{1}{3}}$ 设切点$P(x_0,y_0)$

$\therefore l: y-y_0=-(\frac{y_0}{x_0})^{\frac{1}{3}}(x-x_0)$ 交点 $A(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}},0)$ $B(0,a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}})$ $\therefore AB=a$.

例3. 求阿基米德曲线 $r=\theta$ 在$\theta=\frac{\pi}{2}$处切线方程.

$\begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases}$ $\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2}{\pi}$ $\quad l: y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

7. 一元函数的微分：设$y=f(x)$在$U(x_0)$内有定义. 若$\exists$常数$A\in\mathbb{R}$ s.t. $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$



(当$\Delta x\to 0$时) 则称$f(x)$在x_0处可微，记作 $dy=A\Delta x$ 或 $df(x)=A\Delta x$.

由微分定义可知 $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+o(\Delta x)$

其中 $f(x_0)+A\Delta x$ 为 $f(x_0+\Delta x)$ 的线性主部.

定理：函数$f(x)$在x_0处可微$\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0处可导

必要性：$\because f$在x_0处可微 $\therefore \Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

$\therefore f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{A\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=A$

注：由上知$A=f'(x_0)$.

充分性：$\because f$在x_0处可导 $\therefore f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+o(1)$

$\therefore \Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$. $\therefore f(x)$在x_0处可微.

8.微分的计算：$dy=A\Delta x=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$

($dx=\Delta x$：令$y=x$ $\therefore dx=(x)'\Delta x=\Delta x$).

例1 计算$y=e^{\sin x}$，$y=x^2\ln(1+x^2)$ 微分.

$y'=e^{\sin x}\cos x$ $\therefore dy=e^{\sin x}\cos x\,dx$

$y'=2x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^3}{1+x^2}$ $\therefore dy=[2x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^3}{1+x^2}]dx$

例2 设$y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$，求$dy$与$dy|_{x=1}$.

$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$ $\therefore dy=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$ $dy|_{x=1}=-\frac{1}{2}dx$

9.一阶微分的形式不变性：设$y=f(u)$，$u=g(x)$均可导，则$y=f[g(x)]$可微且

$\therefore dy=f'(u)du$ $\therefore\dfrac{dy}{dx}=f'(g(x))g'(x)$ $\therefore dy=f'(g(x))g'(x)dx=f'(u)du$

$\therefore$对于变量u，无论作中间变量还是自变量，其微分形式一样，称为一阶微分的形式不变性.

注：二阶微分无形式不变性. $dy=f'(x)dx$ $d^2y=f''(x)dx^2$

($d(uv)=vdu+udv$ (因$d(uv)/dx=(u'v+uv')dx$) x作中间变量时$d^2x\neq 0$.

$\therefore d(dy)=d^2y=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx+f'(x)d(dx)=f''(x)dx^2+\underline{f'(x)d^2x}$

例 设$y=y(x)$由$x^y=y^x$ $(x,y>0)$确定，求$\dfrac{dy}{dx}$

两边取对数：$y\ln x=x\ln y$ 两边微分：$\ln x\,dy+\dfrac{y}{x}dx=\ln y\,dx+x\dfrac{1}{y}dy$

$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$

§1 微分中值定理

局部概念 不考虑端点

1. 函数的极值：设$f(x)$在x_0的某个邻域$U(x_0)$内有定义，若$\exists\delta>0$，$\forall x\in(x_0,\delta)$ 均有$f(x)\geq f(x_0)$（或$f(x)\leq f(x_0)$），则称$f(x)$在x_0处取极小值（或极大值）

注：函数的极值是局部的概念，不具有整体性；函数在区间端点处不存在极值，极值点x_0一定是定义域的内点（某邻域内有定义）；极大值可以比极小值小。

可能极值点：导数不存在的点、导数为零的点

2. Fermat定理：设$f(x)$在x_0处有极值，且$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0$

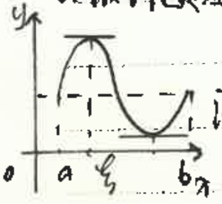
证明：不妨设$f(x)$在x_0处有极大值，则

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$$

而$f'(x_0)$存在，$\therefore f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$ $\therefore f'(x_0)=0$.

注：Fermat定理说明：函数极值点要么不可导，要么导数为零。导数为零的点称为驻点。闭区间上连续函数一定存在最大值和最小值，若其最值在内部取得，则为极值，若可导，根据Fermat定理，其导数为0.

3. 微分中值定理：1. Rolle定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)$，则



$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

证明：$\because f$在$[a,b]$上连续 $\therefore f(x)$在$[a,b]$上有最大值M和最小值m.

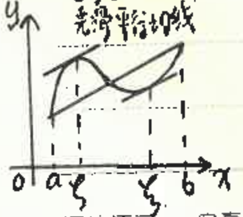
若$M=m$，则$f(x)$为常函数，显然.

若$M>m$，而$f(a)=f(b)$ $\therefore M$与m不能同时在端点a,b取到.

不妨设$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f(\xi)=M$ $\therefore f(x)$在$x=\xi$处取极大值

$\therefore$由Fermat定理知 $f'(\xi)=0$.

光滑连续曲线，定存在光滑平行切线



2. Lagrange中值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则$\exists\xi\in(a,b)$

s.t. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

证明法：k值法：$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\triangleq k \Rightarrow f'(x)-k=0$ 有零点.

思路：导函数不连续，在原函数上研究. $f'(x)-k=0 \Rightarrow F(x)=f(x)-kx$

$\Rightarrow F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

$\xrightarrow[\text{不改变}F'(x)]{f(a)=f(b)=f(a)} F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 适用Rolle

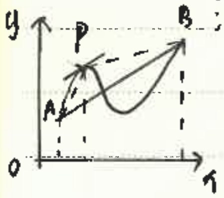
$\xrightarrow{F(a)=F(b)=0} F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ 增强几何意义

$F(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$ 割线 不研究斜率

$\therefore F(x)$在$[a,b]$上连续 在(a,b)内可导 且$F(a)=F(b)=0$

由Rolle定理 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F'(\xi)=0$ 即 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

注：ξ常记作 $\xi=a+\theta(b-a)$, $\theta\in(0,1)$



法二. 面积法 $2S_{\triangle PAB}=F(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$

$\therefore F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & f'(x) & 0 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & f'(x) & 0 \\ a & f(a) & 1 \\ b-a & f(b)-f(a) & 0 \end{vmatrix}=(b-a)f'(x)-(f(b)-f(a))$

$F(x)$在$[a,b]$上连续 在(a,b)内可导. 且$F(a)=F(b)=0$

由Rolle定理知 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F'(\xi)=0$ 即 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

Lagrange中值定理形式：(1) $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (2) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

微分中值定理的推论：推论1：设$f(x)$在区间D内可导 且对$\forall x\in D$ 均有 $f'(x)=0$ 则$f(x)\equiv C$.

$\forall x_1<x_2\in D$. 则$f(x)$在$[x_1,x_2]$上可导.

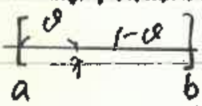
由Lagrange中值定理知 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$ s.t.

$\underbrace{f(x_2)-f(x_1)}_{}=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$ $\therefore f(x)\equiv C$.
前式

推论2. 设$f(x)$, $g(x)$在区间D内可导 且对$\forall x\in D$ 均有 $f'(x)=g'(x)$.

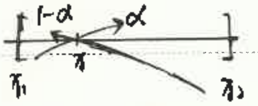
则对$\forall x\in D$ 均有 $f(x)=g(x)+C$

Jensen不等式：



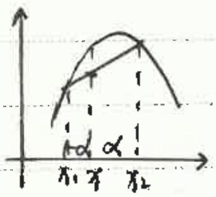
$\frac{x-a}{b-a}\triangleq\theta\in(0,1)$

单调性：$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \Rightarrow f'(\xi)>0$, $f\uparrow$.
$f'(\xi)<0$, $f\downarrow$



$x = a + \theta(b-a) = (1-\theta)a + \theta b$

$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$　　　$\xi = a + \theta(b-a)\ (0<\theta<1)$



$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)x_2$

例1. 证明: $\arctan x - \arctan\frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{4}\ (x>-1)$

记 $f(x) = \arctan x - \arctan\frac{x-1}{x+1}$ 当 $x>-1$ 时

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(\frac{x-1}{x+1})^2}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} = 0$ $\therefore f(x) \equiv f(1) = \frac{\pi}{4}$

注: $f(-1-0) = -\frac{3}{4}\pi$. $f(-1+0) = \frac{\pi}{4}$.

当 $x<-1$ 时 $\arctan x - \arctan\frac{x-1}{x+1} = -\frac{3}{4}\pi$.

例2. 证明: $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\ (x>0)$.

记 $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2}) = 0$

$\therefore \forall x>0$. 均有 $f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$

变式. 设 $f(x) = x^2(\arctan e^x + \arctan e^{-x})$. 求 $f'(x)$

$f(x) = \frac{\pi}{2}x^2$ $\therefore f'(x) = \pi x$

例3. $f(x) = \arctan x$. 对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上应用 Lagrange 中值定理. 求其中值 ξ.

根据 Lagrange 中值定理. $\exists \xi \in (0,1)$ s.t. $f(1) - f(0) = f'(\xi)(1-0)$

$\therefore \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+\xi^2} \Leftrightarrow \xi = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$

3. Cauchy 中值定理. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 在 (a,b) 内可导 且 $g'(x) \neq 0$ 则

$\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (令 $g(x) = x$. 化为 Lagrange 中值定理)

证明: 思路: 要证 $f'(\xi)[g(b)-g(a)] = g'(\xi)[f(b)-f(a)]$

$\xrightarrow{\text{化为零点问题}}$ $g'(\xi)[f(b)-f(a)] - f'(\xi)[g(b)-g(a)] = 0$

$\xrightarrow{\text{研究原函数}}$ $g(x)[f(b)-f(a)]-f(x)[g(b)-g(a)]=0$

$\xrightarrow[\text{适用Rolle}]{F(a)=F(b)}$ $[g(x)-g(a)][f(b)-f(a)]-[f(x)-f(a)][g(b)-g(a)]=G(x)$ 研究·操

$\therefore G(x)$在$[a,b]$上连续 在(a,b)内可导 且 $G(a)=G(b)=0$.

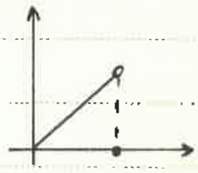
由Rolle定理知 $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $G'(\xi)=0$.

下证 $g(a)\neq g(b)$. 若$g(a)=g(b)$, 由Rolle定理知 $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $g'(\xi)=0$ 与$g'(x)\neq 0$矛盾 $\therefore g(a)\neq g(b)$

$$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

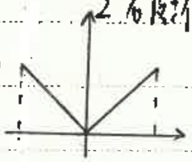
注. 1. 定理条件愈强, 适用范围愈小. 如将Rolle定理加强为闭区间可导, 则 $f(x)=\sqrt{x}$ $(0\le x\le 1)$ 不再适用. ($x=0$处不可导)

2. Rolle定理条件为充分不必要条件 且三个条件缺一无法推出.

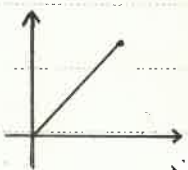


①. 破坏连续性

$$f_1(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1)\end{cases}$$



②. 破坏可导性 $f_2(x)=|x|$ $(-1\le x\le 1)$



③ 破坏相等条件

$f_3(x)=x$ $(0\le x\le 1)$

3. "ξ"存在性证明, 微分中值定理证明, 往往与闭区间上连续函数性质结合: 介值定理, 最值定理等.

Darboux定理: 设$f(x)$在$[a,b]$上可导 且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$. $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$

注: 导函数未必连续. 如 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 则 $f'(0)=0$.

当$x\neq 0$时 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ (无)

$\therefore f'(x)$在$x=0$处不连续

例4. 证明 $a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx=0$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个根。

思路：找原函数作研究对象。

令 $f(x)=a_1\sin x+\frac{a_2}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{a_n}{n}\sin nx$

则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 连续 在 $(0,\pi)$ 可导 且 $f(0)=f(\pi)=0$

由Rolle定理知 $\exists\,\xi\in(0,\pi)$ s.t. $f'(\xi)=0$

而 $f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx$ ∴方程在 $(0,\pi)$ 内至少有一个根。

注：Cauchy中值定理是Lagrange中值定理的参数方程形式。

$C:\begin{cases}x=g(t) & (g'(t)\neq 0)\\ y=f(t) & (a\le t\le b)\end{cases}\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$

例5. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 连续 在 $(0,2)$ 可导 且 $f(0)=0$. $f(1)=3$. $f(2)=-1$. 证明：

$\exists\,\xi\in(0,2)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

法一 介值+Rolle ∵ f 在 $[0,2]$ 连续 $f(1)=3$ $f(2)=-1$

找相等 ∴由介值定理知 $\exists\, c\in(1,2)$ s.t. $f(c)=0$

∴在 $[0,c]$ 上应用Rolle定理，$\exists\,\xi\in(0,c)\subseteq(0,2)$ s.t. $f'(\xi)=0$

法二 最值+Fermat ∵ $f(0)=0$ $f(1)=3$ $f(2)=-1$

找极值 ∴ $f(x)$ 最大值在 $(0,2)$ 内取得

不妨设 $f(\xi)=\max\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$ ∴ $f(x)$ 在 $x=\xi$ 处取得极大值.

∴由Fermat定理知 $f'(\xi)=0$.

法三 Lagrange+Darboux 在 $[0,1]$ $[1,2]$ 上应用Lagrange中值定理.

找 +/- $\exists\, c_1\in(0,1)$ $c_2\in(1,2)$ s.t.

$f'(c_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}>0\quad f'(c_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}<0$

由Darboux定理知 $\exists\,\xi\in(c_1,c_2)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

試. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续 在 $(0,2)$ 内可导 且 $f(1)=2$. $f(0)=f(2)=0$. 证明: $\exists \xi\in(0,2)$

s.t. $f'(\xi)+f(\xi)=1$

思路: 找原函数 $(\ )f'(x)+(\ )'f(x)=0 \Rightarrow F(x)=e^x f(x)$.

$f'(x)+f(x)-1=0 \Rightarrow (f(x)-1)'+(f(x)-1)=0$

$\Rightarrow F(x)=e^x[f(x)-1]$.

$F(0)=-1$ $F(1)=e$ $F(2)=-e^2$ $\because F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续 $\therefore F(x)$ 在 $(0,2)$ 取 max

不妨令 $\exists \xi\in(0,2)$ s.t. $F(\xi)=\max\limits_{0\le x\le 2} F(x)$

由 Fermat 定理知 $F'(\xi)=0$ $\therefore \exists \xi\in(0,2)$ s.t. $f'(\xi)+f(\xi)=1$

(另解: 介值 + Rolle)

注. 加权平均型 ξ ∃问题: $\sum(a_i f(x_i))=\sum a_i\cdot f(x_{n+1})\Rightarrow f'(\xi)=0$ $(x_i\in I)$ $(x_{n+1}\notin I)$

利用 $f(x_{n+1})=\dfrac{\sum a_i f(x_i)}{\sum a_i}=f(x')$. $(x'\in I.\ x_{n+1}\notin I\Rightarrow x'\neq x_{n+1})$

$\therefore \exists \xi\in(x',x_{n+1})\subseteq(\alpha,\beta)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

例6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(b>a>0)$ 上连续 在 (a,b) 内可导. 证明: $\exists \xi\in(a,b)$ s.t.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{\ }$ 形式 $=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)(\ln b-\ln a)$

令 $g(x)=\ln x$. 对 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Cauchy 中值定理

$\exists \xi\in(a,b)$ s.t. $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\xi f'(\xi)$

4 "ξ" 存在性证明中常见函数的构造: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 在 (a,b) 内可导. 且 $f(a)=f(b)=0$.

证明: $\exists \xi\in(a,b)$. s.t.

(1) $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=xf(x)$ 加法: 考虑乘法

(2) $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=x^2 f(x)$ ($ab>0$: 构造中约分, $0\notin(a,b)$)

(3) $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ ($ab>0$: 作分母. $0\notin(a,b)$) 2: 考虑平方

减法: 考虑除式

(4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda f(\xi)+\xi f'(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=x^{\lambda} f(x)$ $(b>a>0)$ 幂函数

(5) $f'(\xi)\pm f(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=e^{\pm x} f(x)$

(6) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=e^{\lambda x} f(x)$

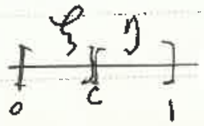
(7) $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0 \Rightarrow F(x)=e^{x^2} f(x)$

导函数前无原函数：考虑 e^x

例7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$。证明 对 $\forall a,b>0$，$\exists \xi\neq\eta\in(0,1)$

s.t. $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$

思路：一个函数 两阶值 $\Rightarrow$ 两个区间

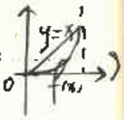


$f'(\xi)=\dfrac{f(c)}{c}$，$f'(\eta)=\dfrac{1-f(c)}{1-c}$

$\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{1}{f'(\eta)}=1$

权重：令 $\dfrac{a}{a+b}=\alpha$

（注：不一定 $\exists c\in(0,1)$ s.t. $f(c)=c$：



$\therefore\ \alpha\dfrac{c}{f(c)}+(1-\alpha)\dfrac{1-c}{1-f(c)}=1$ 即需 $f(c)=\alpha$

证明：$\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=0$，$f(1)=1$

由连续函数介值定理 $\exists c\in(0,1)$ s.t. $f(c)=\dfrac{a}{a+b}\triangleq\alpha$.

在 $[0,c]$，$[c,1]$ 上分别应用 Lagrange 中值定理 $\exists \xi\in(0,c)$，$\eta\in(c,1)$

s.t. $f(c)-f(0)=f'(\xi)(c-0)$，$f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c)$

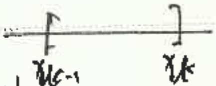
$\therefore\ \dfrac{\alpha}{f'(\xi)}+\dfrac{1-\alpha}{f'(\eta)}=c+1-c=1$ 即 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$

变式1. 证明：$\exists\ \xi<\eta\in(0,1)$ s.t. $\dfrac{3}{f'(\xi)}+\dfrac{2019}{f'(\eta)}=2022$（识别一般模式）

变式2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\forall \alpha_i>0$，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$

存在严格递增的 $\xi_i\in(0,1)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ s.t. $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{f'(\xi_i)}=1$.

思路：分割区间 $\Rightarrow$ 找一般情况



$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$

$\therefore\ \dfrac{\alpha_k}{f'(\xi_k)}=\alpha_k\dfrac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$，$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k}{f'(\xi_k)}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\dfrac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$

裂项结构

约分结构

∴令 $f(x_k)=\alpha_k+f(x_{k-1})$ ∴ $f(x_k)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$

证明：∵ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$0=f(0)<\alpha_1<f(1)=1$

根据连续函数介值定理，∃ $x_1\in(0,1)$ s.t. $f(x_1)=\alpha_1$

同样 ∃ $x_2\in(x_1,1)$ s.t. $f(x_2)=\alpha_1+\alpha_2$

依次类推，可得 ∃ $x_k\in(x_{k-1},1)$ s.t. $f(x_k)=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ ($k=1,2,\cdots,n$，记 $x_0=0$，$x_n=1$)

∴∃ $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$

s.t. $f(x_k)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$ ($k=1,2,\cdots,n$)

在 $[x_{k-1},x_k]$ 上分别应用 Lagrange 中值定理，

∃ $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$ s.t. $\alpha_k=f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\Rightarrow\frac{\alpha_k}{f'(\xi_k)}=x_k-x_{k-1}$

∴ $\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{f'(\xi_k)}=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=x_n-x_0=1$

推广：对 ∀ $k_i>0$，∃ x_i ($i=1,2,\cdots,n$) s.t. $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i$

推广的Rolle定理：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，在 $(a,+\infty)$ 可导，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$，

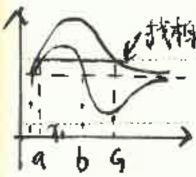
证明 ∃ $\xi\in(a,+\infty)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

法一：反证法，若对 ∀ $x>a$，$f'(x)\neq 0$，由 Darboux 定理知，

$f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 保号，不妨设 $f'(x)>0$

则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 严↑，∴ $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq f(a)$ 矛盾，∴∃ $\xi\in(a,+\infty)$ s.t. $f'(\xi)=0$

法二：设 $g(x)=f(x)-f(a)$



找相等

1° 若 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内不保号，则 ∃ $x_1\neq x_2$ s.t. $g(x_1)g(x_2)<0$

由零点存在定理知 ∃ $c\in(x_1,x_2)$ 或 $c\in(x_2,x_1)$ s.t. $g(c)=0$，即 $f(c)=f(a)$

在 $[a,c]$ 应用 Rolle 定理，∃ $\xi\in(a,c)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

2° 若 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内保号，不妨设 $g(x)>0$，即 ∀ $x>0$，$f(x)>f(a)$

取 $c>a$，则 $f(c)>f(a)$ (利用介值)

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$ 则 $\exists G(>c)>0$. $\forall x>G$ $f(a)<f(x)<f(c)$

取 $x=G+1$ $\therefore f(a)<f(G+1)<f(c)$

又 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 连续 $\therefore \exists b\in(a,c)$ s.t. $f(b)=f(G+1)$

在 $[b,G+1]$ 上应用Rolle定理. $\exists \xi\in(b,G+1)$ s.t. $f'(\xi)=0$

法二：无限 $\Rightarrow$ 有限. $[a,+\infty) \longrightarrow [\arctan a, \frac{\pi}{2}]$ $f(\tan u)$.

设 $\varphi(x)=f(\tan x)$, $x\in[\arctan a,\frac{\pi}{2})$

$\because \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\varphi(x)=f(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x)=f(+\infty)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)\doteq A\in\mathbb{R}$.

利用极限补充定义

$\therefore$ 可以补充定义 $\varphi(\frac{\pi}{2})=A$. 则 $\varphi(x)$ 在 $[\arctan a,\frac{\pi}{2}]$ 上连续 在 $(\arctan a,\frac{\pi}{2})$

可导 $\varphi'(x)=f'(\tan x)\sec^2 x$

又 $\varphi(\arctan a)=\varphi(\frac{\pi}{2})$ $\therefore$ 由Rolle定理知 $\exists\eta\in(\arctan a,\frac{\pi}{2})$ s.t. $\varphi'(\eta)=0$

进而 $f'(\tan\eta)\sec^2\eta=0 \Rightarrow f'(\tan\eta)=0$

记 $\tan\eta=\xi\in(a,+\infty)$ $\therefore \exists\xi\in(a,+\infty)$ s.t. $f'(\xi)=0$

例8. 证明: $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$.

只需证 $\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}<1$

令 $f(t)=\ln(1+t)$ $f(t)$ 在 $[0,x]$ 连续 在 $(0,x)$ 可导

由Lagrange中值定理知 $\exists\xi\in(0,x)$ s.t. $\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{1+\xi}$

而 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$ $\therefore \frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$ (利用Lagrange放缩)

变式：证明 $|\arctan b-\arctan a|\le|b-a|$

$\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}=\frac{1}{1+\xi^2}\le 1$

例9. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导 $0\le f(x)\le\frac{x}{x^2+1}$ 证明：$\exists\xi,\eta\in(0,+\infty)$ s.t.

$f'(\xi)=0$ $f'(\eta)=\frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 又 $f(0)=0$ 由推广Rolle定理知 $\exists\xi\in(0,+\infty)$.

s.t. $f'(\xi)=0$

要证 $f'(\eta)-\frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}=0 \Longrightarrow$ 找原函数. 令 $g(x)=\frac{x}{x^2+1}-f(x)$. $0\le g(x)\le\frac{x}{x^2+1}$

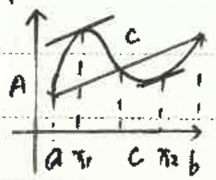
又 $g(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 由推广Rolle定理知 $\exists\eta\in(0,+\infty)$ s.t. $g'(\eta)=0$

$\therefore f'(\eta)=\frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}$.

注: Rolle否定形式: $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)\neq0 \Rightarrow \forall x_1,x_2\in(a,b)$, $f(a)\neq f(b)$

例. $f(x)$ 有n个零点 $\Rightarrow\exists\xi$ s.t. $f^{(n-1)}(\xi)=0$. $f'(x_1)=0 \xrightarrow{f''(\xi)=0} f'(x_2)=0$

例10. $AB\cap\Gamma=C$. 则 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f''(\xi)=0$.



在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上运用Lagrange中值

$\exists x_1\in(a,c)$, $x_2\in(c,b)$. $f'(x_1)=f'(x_2)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

在 $[x_1,x_2]$ 上运用Rolle定理. $\exists\xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $f''(\xi)=0$.

例11. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 在 $(0,1)$ 可导. 且 $f(0)=0$. $f(1)=1$. 证明: $\exists\xi,\eta\in(0,1)$ s.t. $f'(\xi)f'(\eta)=1$

思路: 一个函数, 两个中值 $\Rightarrow$ 两个区间

取 $c\in(0,1)$ 在 $[0,c]$, $[c,1]$ 上分别应用Lagrange中值定理. $\exists\xi\in(0,1)$ s.t.

$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}$ $\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-f(c)}{1-c}$

$\therefore f'(\xi)\cdot f'(\eta)=\frac{f(c)[1-f(c)]}{c(1-c)}$ $\quad\therefore g(x)=f(x)-x$ 在 $(0,1)$ 不一定有零点. ($g(0)=0$, $g(1)=0$)

$\therefore$ 考虑 $h(x)=f(x)+x-1$. 则 $h(0)=-1$. $h(1)=1$

$\therefore\exists c\in(0,1)$ s.t. $f(c)=1-c$ 代入即证.

例12. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 2阶可导. 且 $f(a)=f(b)=0$ 证明: $\underline{\forall x\in(a,b)}$. $\exists\xi\in(a,b)$ s.t.

$2f(x)=f''(\xi)(x-a)(x-b)$. $\qquad$ 给定x $\Rightarrow$ x 为常量

K值法: $f''(\xi)=\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}\triangleq\underline{K}$ (对给定x为常量)

$\qquad$ 形式一致, 增加零点

$\underline{\text{原函数}}\Longrightarrow$ 令 $F(t)=f(t)-\frac{1}{2}K(t-a)(t-b)$ 则 $F(a)=F(x)=F(b)$ ($\underline{\text{增加了一零点}}$)

对 $F(t)$ 在 $[a,x]$. $[x,b]$ 上应用Rolle定理可得 $\exists x_1\in(a,x)$. $x_2\in(x,b)$ s.t. $F'(x_1)=F'(x_2)=0$

再在 $[x_1,x_2]$ 上应用Rolle定理. $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F''(\xi)=0$ 即 $f''(\xi)-K=0$ 即证

例13：设$f(x)$在$[a,b]$上3阶可导且$f(a)=f(a)=f(b)=0$ 证明：$\forall x\in(a,b)$，$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $6f(x)=f'''(\xi)(x-a)^2(x-b)$.

令$K=\frac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$ 记$F(t)=6f(t)-K(t-a)^2(t-b)$

则$F(a)=F(x)=F(b)=0$

在$[a,x]$ $[x,b]$应用Roll定理得$\exists c_1\in(a,x)$，$c_2\in(x,b)$ s.t. $F'(c_1)=F'(c_2)=0$ 而$F'(a)=0$

在$[a,c_1]$ $[c_1,c_2]$上应用Roll定理 $\exists x_1\in(a,c_1)$，$x_2\in(c_1,c_2)$ s.t. $F''(x_1)=F''(x_2)=0$

再在$[x_1,x_2]$上应用Rolle定理得$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F'''(\xi)=0$ 即$f'''(\xi)=K$ 即证.

例14.设$f(x)$在$[0,2]$上2阶可导且$f(0)=3$，$f(1)=0$，$f(2)=-1$ 证明：$\exists\xi\in(0,2)$ s.t. $f''(\xi)=2$.

拟合法：过$(0,3)$ $(1,0)$ $(2,-1)$抛物线为$y=x^2-4x+3$

记$g(x)=f(x)-(x^2-4x+3)$ 则$g(x)$在$[0,2]$可导且$g(0)=g(1)=g(2)=0$，由Rolle定理知

$\exists\xi\in(0,2)$ s.t. $g''(\xi)=0$ 而 $g''(x)=f''(x)-2$ $\therefore\exists\xi\in(0,2)$ s.t. $f''(\xi)=2$.

例15.设f在(a,b)可导.若$f'(x)$在(a,b)有界.则f在(a,b)上一致连续

$\because f'$在(a,b)有界 $\therefore\exists M>0$，$\forall x\in(a,b)$ s.t. $|f'(x)|\le M$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0$，$\forall x',x''\in(a,b)$ $|x'-x''|<\delta$.

利用Lagrange放缩

Lagrange形式 $|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)(x'-x'')|\le M|x'-x''|<M\delta=\varepsilon$ $\therefore f$在$[a,b]$一致连续

导数极限存在定理：设f在x_0连续.在$\mathring{U}(x_0)$内可导.且$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在.则$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$.

$\forall x\in\mathring{U}_+(x_0)$，$f$在$[x_0,x]$上满足Lagrange中值定理条件（$(x_0,x]\subseteq\mathring{U}(x_0)$，$(x_0,x]\cup\{x_0\}$）

导数定义形式 ~Lagrange形式

$\therefore\exists\xi\in(x_0,x)$ s.t. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$ $=f'(x_0+0)$.

当$x\to x_0$时 $\xi\to x_0$ $\therefore f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(\xi)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)$

同理，$f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$ 又$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在 $\therefore f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$.

若$f'(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$都存在.则两者相等

若$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在且$f$在$x_0$处连续则$f'$在$x_0$处连续

§2 L'Hospital法则

1. 洛必达法则：定理1.（$\frac{0}{0}$型）：设$f(x)$, $g(x)$在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内满足

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$　(2) $f(x)$, $g(x)$可导且$g'(x)\neq0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（常数或$\infty$）$\infty$处理：取倒数

则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

注：(1)所求极限为$\frac{0}{0}$或$\frac{*}{\infty}$型　(2)分子分母导数存在　(3)导数比$\frac{f'(x)}{g'(x)}$的极限存在

(4)终止条件：化为确定型　$\frac{C_2}{C_1}\neq0$.

不适用洛必达的情况：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{2x-1}=1$（非$\frac{0}{0}$型）

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$　（$(x^2\sin\frac{1}{x})'|_{x=0}$不存在）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}=1$（导数极限不存在）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1$（循环）

证明：补充定义$f(x_0)=g(x_0)=0$. 则$f(x)$, $g(x)$在$U(x_0,\delta)$连续.

$\forall x\in U_+(x_0,\delta)$, 则$f(x)$, $g(x)$在$[x_0,x]$连续 且在(x_0,x)内可导

$g'(t)\neq0$, $\forall t\in(x_0,x)$. 由Cauchy中值定理知. $\exists\theta\in(0,1)$ s.t.

$\frac{f(x)}{g(x)}\overset{补充定义}{=}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta(x-x_0))}{g'(x_0+\theta(x-x_0))}$

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f'(x_0+\theta(x-x_0))}{g'(x_0+\theta(x-x_0))}=\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.
换元

同理可证$\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

定理2.（$\frac{*}{\infty}$型）：设$f(x)$, $g(x)$在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内满足

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.　(2) $f(x)$, $g(x)$可导且$g'(x)\neq0$

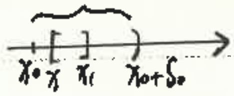
(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（常数或$\infty$）

则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

证明：思路：$\because x\to x_0$, $g(x)\to\infty$ $\therefore$无法在x_0处补充定义 需找x_1进行补充定义.

联系

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\cdot\underbrace{\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}}_{\to 1}+\underbrace{\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{\to 0}\quad \frac{f(x_1)\Rightarrow\text{有限值}}{g(x)\to\infty}$$



设 $A\in\mathbb{R}$. $\because \lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. $\therefore \forall\varepsilon>0$, $\exists x_1\in \mathring{U}_+(x_0,\delta_0)$ $\forall x\in(x_0,x_1)$.

s.t. $A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\frac{\varepsilon}{2}$

又 f,g 在 $[x,x_1]$ 上满足 Cauchy 中值定理条件, 故 $\exists\xi\in(x,x_1)$

s.t. $A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_1)}{g(x)}\right)\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}<A+\frac{\varepsilon}{2}$

而 $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}=1$ 由函数极限的保号性. $\exists\delta_1<x_1-x_0$ s.t. $\forall x_0<x<x_0+\delta_1$,
$\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}>0$.

$\therefore \left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}$

又 $\lim\limits_{x\to x_0+0}g(x)=\infty$ $\therefore A-\frac{\varepsilon}{2}\le\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)}{g(x)}\le A+\frac{\varepsilon}{2}$

由 ε 任意性得 $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$ 同理 $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

注: 常见待定型极限有 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; 1^∞, 0^0, ∞^0 等. 后三种形式一般用对数求极限法进行计算. 而 1^∞ 型极限用如下定理计算:

设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=A$.

则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))^{g(x)}=e^A$. 化简如等价替换 四则 降阶

例1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\xlongequal{\infty-\infty\text{通分}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\text{常数}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 可导 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=A\in\mathbb{R}$. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

反证法假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$. 消 e^x 要求分母 ...

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)] = A.$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)] - \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

例3. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$　先化简，后消

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x + x)(\tan x - x)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}\cdot\frac{\tan x + x}{x}$$ 阶数配凑.

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{2}{3} \quad (\sec^2 x - 1 = \tan^2 x)$$

变式: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\arcsin^2 x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x + x}{x}\cdot\frac{\arcsin x - x}{x^3} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

例4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-3x^3}-\sqrt{1+5x^3}+x^4\sin\frac{1}{x}}{x^3}$

估阶数判定题目难度　先处理 $x^4\sin\frac{1}{x}$　$\because \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}=0 \quad \forall \alpha\in(0,1)$ 任意成立

$\therefore x\sin\frac{1}{x}\in(0,1)$ 阶　$\therefore x^4\sin\frac{1}{x} > 3$ 阶.　$\therefore \frac{x^4\sin\frac{1}{x}}{x^3}\to 0.$

$$\therefore I = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1-3x^3}-1)-(\sqrt{1+5x^3}-1)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}x^3}{x^3} = \frac{-7}{2}$$

例5. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x} = e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x} = e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x} = -\frac{1}{2}e$$

变式1. $\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$

找 $\lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]$ + Heine 归结.

变式2. $\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right) - \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} 3n\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} - e\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}e\right) = -\frac{e}{3}.$$

变式3. $f(x) = \begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & (x\neq 0,\ -1<x<1) \\ e. & (x=0)\end{cases}$ 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且导函数在 $x=0$ 连续.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\dfrac{1}{2}e$

当$x\neq 0$时 $f'(x)=[e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}]'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}e$ $\therefore f'(x)$在$x=0$连续

例6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x^2}$

法一: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+2\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

法二: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)+(1-\cos 2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=\dfrac{5}{2}$

例7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x\ln(1+2x))^{\cot^2 x}$

1^∞型: $I=\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)+x\ln(1+2x)]^{\frac{1}{(\cos x-1)+x\ln(1+2x)}\cdot\frac{(\cos x-1)+x\ln(1+2x)}{\tan^2 x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{x\ln(1+2x)}{x^2}\right)}=e^{\frac{3}{2}}$

例8. $x\to 0$. $e^x-(ax^2+bx+1)=o(x^2)$, 则 $a=\underline{\tfrac{1}{2}}$, $b=\underline{1}$. $\therefore a=\dfrac{1}{2}$.

$0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(2ax+b)}{2x}\overset{b=1}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2a}{2}=\dfrac{1-2a}{2}=0$

例9. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

∞^0型: 取对数 $\ln y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$.

2. 三个重要极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{e^x}=0$ $(e^x>>x^\alpha)$

以e^x代x $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=0$ $(\alpha>0)$ $(x^\alpha>>\ln x)$

以$\frac{1}{x}$代x $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{-\alpha x^{-\alpha}}=-\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha=0$ $(\alpha>0)$

注: 在广义积分计算、级数敛散性判断中经常使用

例. 设$f(x)$在$x=0$处二阶可导, 且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=4$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

不可用洛必达: 1) $f'(x)$在$x=0$附近不一定可导. 2) $f''(0)$不是$\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$ (二阶导不一定连续)

$\because f(x)$在$x=0$处二阶可导, 则$f(x)$在$x=0$处连续.

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

$\therefore f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=4$

$f(x)$在$x=0$处二阶可导

$\Downarrow$

$f'(x)$在$x=0$处连续, 在$x=0$附近有定义

$\Downarrow$

$f(x)$在$x=0$附近连续

$\therefore I = \lim_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}} = e^2$

例1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan(\arcsin x)}{x^3}$

对 $f(x)=\tan x$ 用 Lagrange 中值定理知 $\tan x-\tan(\arcsin x)=(\sec^2\xi)(x-\arcsin x)$，$\sec^2\xi\to 1$

$\therefore I=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$

例2. $\ln\frac{\sin x}{x}=\ln(1+\frac{\sin x-x}{x})\sim\frac{\sin x-x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}{x}\sim-\frac{x^2}{6}$

注: $f(\sin x)\sim f(x)$

例3. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-\ln(x+1)\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2}$

凑出常见结构

而硬直接替换(错误)

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}+\lim_{x\to 0}(1-\cos\frac{\pi}{2}x)\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(x+1)}=\frac{1}{2}$

例4. 设 $g(x)$ 在 R 上有二阶连续导数且 $g(0)=1$. 记 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ g'(0), & x=0\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续性. 求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续性.

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}(g'(x)+\sin x)=g'(0)=f(0)$ $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 连续

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)+\sin x}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}+\frac{1}{2}=\frac{g''(0)+1}{2}$ （$g''(x)$ 连续可用洛必达. 若不连续 利用二阶导定义）

当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)=\frac{x(g'(x)+\sin x)-(g(x)-\cos x)}{x^2}$

$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(g'(x)+\sin x)-(g(x)-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}=\frac{g''(0)+1}{2}$ $\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例5. 设 ξ 为 $f(x)=\arcsin x$ 在 $[0,\alpha]$ 上应用 Lagrange 中值定理的中值. 求 $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\xi}{\alpha}$.

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $f(x)$ 在 $[0,\alpha]$ 连续. $(0,\alpha)$ 可导. 由 Lagrange 中值定理. $\exists\ \xi\in(0,\alpha)$ s.t.

$\arcsin\alpha=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\xi^2}}$ $\therefore \xi=\sqrt{\frac{\arcsin^2\alpha-\alpha^2}{\arcsin^2\alpha}}$

$\therefore\lim_{\alpha\to 0}\frac{\xi^2}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin^2\alpha-\alpha^2}{\alpha^2\arcsin^2\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\overbrace{(\arcsin\alpha-\alpha)}^{\text{三阶}}\overbrace{(\arcsin\alpha+\alpha)}^{\text{一阶}}}{\alpha^4}=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha-\alpha}{\alpha^3}$

$=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{3\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}}=\frac{2}{3}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{1}{3}$ $\therefore\lim_{\alpha\to 0}\frac{\xi}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

结论: $f''(0)\neq 0\Rightarrow\lim_{\alpha\to 0}\frac{\xi}{\alpha}=\frac{1}{2}$.

例6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$　1^∞型

法一. $I=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+(e^{3x}-1)}{3}\right)^{\frac{3}{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+(e^{3x}-1)}}\right]^{\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+(e^{3x}-1)}{3\sin x}}=e^2$

法二. $\ln y=\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x})-\ln 3}{\sin x}$　$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x})-\ln 3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}}=2$

$\therefore \lim_{x\to 0}y=e^2$.

例7. $\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\tan 5x}{\ln\tan 3x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{5\sec^2 5x\to 1}{\tan 5x}}{\frac{3\sec^2 3x\to 1}{\tan 3x}}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0+0}\frac{\tan 3x}{\tan 5x}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0+0}\frac{3x}{5x}=1$

例8. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-xf(x)}{x^3}=0$. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{x^2}$.

形式配凑 $\frac{3x-xf(x)}{x^3}$.　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3x+3x-xf(x)}{x^3}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-3}{3x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{x^2}$

$=-\frac{9}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{x^2}=\frac{9}{2}$

另: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\frac{(3x)^3}{6}+o(x^3)-xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{x^2}-\frac{9}{2}=0$

例9. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan(\sin x)}{x^3}$　符: Lagrange 形式.

由Lagrange中值定理 $\exists\,\xi\in(\sin x, x)$或$(x,\sin x)$ s.t. $\tan x-\tan(\sin x)=\sec^2\xi(x-\sin x)$

$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2\xi(x-\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$

变式: $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(\tan x)-\arcsin x}{x^3}$

由Lagrange中值定理 $\exists\,\xi\in(\tan x, x)$或$(x,\tan x)$ s.t. $\arcsin(\tan x)-\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}(\tan x-x)$

$I=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

例10. $\lim_{x\to +\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$　$0^0\to$ 对数求极限.

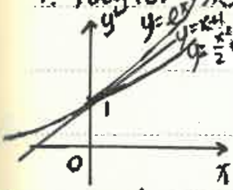
$\ln y=\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}$

$\lim_{x\to +\infty}\ln y=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1-\ln x}{x}}{\frac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1$

$\therefore \lim_{x\to +\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{e}$

§3 Taylor公式和插值多项式 - §4 函数的Taylor公式及其应用

1. Taylor多项式：对于定义在$U(x_0)$的函数$f(x)$



(1) 若$f(x)$在x_0处连续，则$f(x)=f(x_0)+o(1)$

(2) 若$f(x)$在x_0处可导，则 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ （$\Delta y=A(x-x_0)+o(x-x_0)$ 一阶微分）

(3) 若$f(x)$在x_0处有n阶导数

$f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$ $k=0\cdots n$ n次接近

如果$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$

在x_0处满足 $f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 则

$P_n^{(k)}(x)=a_k k!+(x-x_0)Q_{n-k}(x) \Rightarrow P_n^{(k)}(x_0)=a_k\cdot k!=f^{(k)}(x_0)$

（其中$Q_{n-k}(x)$为关于$(x-x_0)$的$(n-k-1)$次多项式）

$\therefore a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ （Taylor系数） $(k=0,1,\cdots,n)$ 由a_k确定的多项式称为Taylor多项式

$\therefore$ Taylor多项式是唯一的 $\left(P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$

一般在$x_0=0$处展开，令$x-x_0=u$，平移。

注：$f(x)$在Taylor多项式$P_n(x)$在点x_0处的k阶导数均相等$(k=0,1,\cdots,n)$

称Taylor多项式$P_n(x)$与$f(x)$在x_0处有n次接近。

2. Taylor定理 - Peano余项：$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

Taylor定理：设$f(x)$在x_0处n阶可导，则 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$，$(x\to x_0)$

即$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\underline{o((x-x_0)^n)}$ Peano余项

证明：$\because$ f在x_0处n阶可导 $\therefore$ f在x_0的某邻域内有$(n-1)$阶导数

$\therefore R_n(x)$在x_0的某邻域内有$(n-1)$阶导数，且

$R_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)-P_n^{(k)}(x_0)=0$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

$P_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}$ （不能再洛：f在x_0某邻域不一定有n阶导数）

n阶导数.

$$\text{计算} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0))=0 \quad \therefore R_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

函数的麦克劳林展开：特别地，f在$x=0$处的Taylor展开称为Maclaurin展开

设$f(x)$在$x=0$处有n阶导数，则 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

3. 常见函数的泰勒展开

(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

求导

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

可写$o(x^{2n-1})$：x^{2n}系数为0，展开至$2n-1$即展开至$2n$

① (-1)次数：配凑 ② 奇函数：偶阶导为0

欧拉：展开 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}+o(x^k)$$

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

积分

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$ C_α^n：推广组合数.

$\left(\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}+\cdots\right.$ 幂级数)

(6) $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$

积分

(以x^2代x：$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-x^2)^{n-1}+\cdots$)

(7) $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$

k个负号

(令$\alpha=-\frac{1}{2}$，以$-x^2$代x：$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-x^2)^k+o(x^{2n})$

k个负号

积分

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}x^{2k}+o(x^{2n})$$

$(2k)!!=2\cdot4\cdot6\cdots2k=2^k k!$

(8) $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)$ 待定系数：$(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots)=(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots)$

$(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots)$

$\Rightarrow a_1=1,\ a_3=\frac{1}{3}\cdots$

(简记：$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$ $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$)

(9) $x\cot x=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6+o(x^6)$

(10) $\sec x = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^6)$

(11) $x\sec x = 1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6+o(x^6)$

(12) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2-\frac{7}{16}ex^3+o(x^3)$ → 提e.在$u=0$处展开

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e\cdot e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}} = e\cdot e^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}$ → 展开至2阶：e^u展开有关u一次项.

$= e\left[1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x+o(x)\right)^2+o(x^2)\right]$

$= e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2)$

→ 无须将$\frac{1}{3}x^2$代入：乘出后至少三阶

例1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x-\tan x}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)}{x^3} = -\frac{1}{6}$

例2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-3}{x^4} = \frac{7}{12}$

注：$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+\cdots \xrightarrow{\text{以}x^2\text{代}u} e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+\cdots$

(1) 在$x=0$处展开，复合后无影响 (2) 已为等式，可直接代入 (3) Taylor展开唯一.

例3. $\lim\limits_{x\to0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

$\lim\limits_{x\to0+0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = -\frac{e}{2}$

$\lim\limits_{x\to0+0}\frac{2\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right]-ex}{x^3} = \frac{11}{12}e$

$\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right)+\frac{e}{2}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}n\left(n\left[e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-e\right]+\frac{e}{2}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\frac{11}{24}e\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{11}{24}e$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e+\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow A=-\frac{e}{2},\ B=\frac{11}{24}e$

例4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{x^3} = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2+x\ln(1-x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+o(x^6)\right)+x\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^3} = -\frac{1}{2}$

例5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x-\tan x}{(e^{2x^2}-1)(\sqrt{1+x}-1)} = \frac{\left[x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]-\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}{2x^2\cdot\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}{x^4} = \frac{1}{12}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

$e^x\sin x$：$\sin x$ → 展至3阶，e^x → 常数

$e^x\sin x$：e^x → 展至2阶，$\sin x$ → 1阶

将所有3阶展开

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-(x+x^2)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

例6. $x\to0$, $\sin^3x-x^3\cos x\sim Ax^\alpha$ 求 A 和 α.

$\sin^3x-x^3\cos x$ 展开3阶不够: 7阶有 $x\cdot x\cdot\frac{x^5}{120}$ 项

$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^3-x^3\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)$

$=\left(x^3-\frac{1}{2}x^5+\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{12}\right)x^7+o(x^7)\right)-\left(x^3-\frac{1}{2}x^5+\frac{x^7}{24}+o(x^7)\right)$

$=\frac{1}{15}x^7+o(x^7)$ $\therefore A=\frac{1}{15}$, $\alpha=7$.

分析: 1° $\sin^3x\sim x^3\cos x$ 三阶, 相减后高于三阶

2° $\sin^3x-x^3\cos x$ 为奇, 到五阶

3° 将 $\sin^3x$ 展开五次时, 结果七次, 故将 $x^3\cos x$ 也展开至七次.

注: 多项展开式 $(x+y+z)^n\longrightarrow C_n^aC_{n-a}^bC_{n-a-b}^c\,x^ay^bz^c$

例7. $f(x)=\arctan x-\frac{x+ax^3}{1+bx^2}$ 当 $x\to0$, 求 a,b 使得 $f(x)$ 成为尽可能高阶的无穷小量并求阶数

$f(x)=\frac{1}{1+bx^2}\left[(1+bx^2)\arctan x-(x+ax^3)\right]$

$=\frac{1}{1+bx^2}\left[(1+bx^2)\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+o(x^7)\right)-(x+ax^3)\right]$

$=\frac{1}{1+bx^2}\left[\left(-a+b-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(-\frac{b}{3}+\frac{1}{5}\right)x^5+\left(\frac{b}{5}-\frac{1}{7}\right)x^7+o(x^7)\right]$

$\frac{1}{1+bx^2}\to1$

$\sim\left(-a+b-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(-\frac{b}{3}+\frac{1}{5}\right)x^5+\left(\frac{b}{5}-\frac{1}{7}\right)x^7+o(x^7)$ $(x\to0)$

$\begin{cases}-a+b-\frac{1}{3}=0\\-\frac{b}{3}+\frac{1}{5}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{15}\\b=\frac{3}{5}\end{cases}$ $\frac{b}{5}-\frac{1}{7}\neq0$.

$\therefore$ 当 $a=\frac{4}{15}$, $b=\frac{3}{5}$ 时 $f(x)$ 为7阶无穷小量, 且 $f(x)\sim-\frac{4}{175}x^7$.

变式: $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^7}\left(\arctan x-\frac{x+ax^3}{1+bx^2}\right)=c\neq0$, 求 a,b,c.

例8. $x\to0$ 时 $e^x=\frac{1+ax}{1+bx}+o(x^2)$ 求 a,b.

法一. 展开 $\frac{1}{1+bx}$ $\frac{1+ax}{1+bx}=(1+ax)\left(1-bx+(bx)^2+o(x^2)\right)$

$=1+(a-b)x+(b^2-ab)x^2+o(x^2)=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$\begin{cases} a-b=1 \\ b^2-ab=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$

法二. 化乘积. $e^x(1+bx) = (1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))(1+bx)$

$= 1+(b+1)x+(b+\frac{1}{2})x^2+o(x^2) = 1+ax+o(x^2)$

$\therefore b+1=a,\ b+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$.

变式: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\frac{1+ax}{1+bx}}{x^3}=c\neq 0$. $a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ c=-\frac{1}{12}$.

例9. $e^{\sin x} = 1+\sin x+\frac{1}{2}(\sin x)^2+\frac{1}{6}(\sin x)^3+o(x^3)$　　三次泰勒展开.

$= 1+[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)]+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))^2+\frac{1}{6}(x+o(x))^3+o(x^3)$

→ 无需展至三阶：次数最低4次.

注: $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ $\underline{\underline{(|x|\leq 1)}}$　$\therefore \frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ (收敛慢, 不易用于估计

$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ $(|x|\leq 1)$　$\therefore \ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

4. Taylor定理 - Lagrange余项

Taylor定理: 设$f(x)$在$[a,b]$上有n阶连续导数, 在(a,b)内$(n+1)$阶可导, 则对$\forall x, x_0\in[a,b]$ $(x\neq x_0)$, $\exists \xi = x_0+\theta(x-x_0)\in(a,b)$ $(\theta\in(0,1))$ s.t.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

其中余项 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (Lagrange余项).

证明: 法一. 要证 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

只需证 $\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$　分子分母求导: Cauchy.

令 $T_n=(x-x_0)^{n+1}$.　$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$　T_n, R_n $(n+1)$阶可导.

$T_n^{(k)}(x_0)=0$.　$R_n^{(k)}(x_0)=0$.　$(1\leq k\leq n,\ k\in N^*)$

$\therefore$对$T_n(x)=(x-x_0)^{n+1}$与$R_n(x)$在$[x,x_0]$或$[x_0,x]$上应用Cauchy中值定理有

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{T_n(x)-\underbrace{T_n(x_0)}_{0}} = \frac{R_n'(\xi_1)}{T_n'(\xi_1)} = \frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{T_n'(\xi_1)-T_n'(x_0)} = \frac{R_n''(\xi_2)}{T_n''(\xi_2)}$$

n+1阶可导. 可用(n+1)次Cauchy

n次Cauchy $\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{T_n^{(n)}(\xi_n)} = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{T_n^{(n)}(\xi_n)-T_n^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{T_n^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$\therefore R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. ($\xi = x+\theta(x-x_0)$. $\theta\in(0,1)$)

法二. 增加零点. 要证 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

只要证 $f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

令 $F(t) = f(x)-[f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n]$

(增加零点: $F(x)=0$)

$F(x_0) = R_n(x)$ $F(x)=0$. 令 $G(t) = (x-t)^{n+1}$ $\therefore G(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$. $G(x)=0$

对 $F(t)$. $G(t)$ 在 $[x,x_0]$ 或 $[x_0,x]$ 上应用Cauchy中值定理. $\exists\xi\in(x,x_0)$ 或 (x_0,x) s.t.

$\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)} = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$

$F'(t) = -[f'(t)-f'(t)+f''(t)(x-t)-f''(t)(x-t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2$

$\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$.

$\therefore \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(\xi-x_0)^n}{-(n+1)(\xi-x_0)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. 即证.

5. 常见函数的泰勒展开: (1) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ ($\theta\in(0,1)$)

(2) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ ($\theta\in(0,1)$)

(3) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ ($\theta\in(0,1)$)

(4) $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$ ($\theta\in(0,1)$)

(5) $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$

$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$ ($\theta\in(0,1)$).

应用: (1) 不等式证明 (2) 估计

例1. 证明: $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ ($x>0$)

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ $\because \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}>0$ $\therefore e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

偶　　　　奇

例1. 证明：$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{2n}}{2n}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

由 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展开式得

$R_n(x)=\ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n})=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$. $\theta\in(0,1)$

当 n 为偶数时. $R_n(x)>0$. n 为奇数时. $R_n(x)<0$

$\therefore x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{2n}}{2n}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

例2. 证明：$\tan x>x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{63}x^7$ $(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$

令 $f(x)=\tan x-x-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{15}x^5-\frac{1}{63}x^7$

$f'(x)=\underbrace{\sec^2x-1}_{\text{结构}}-(x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{9}x^6)=\tan^2x-(x+\frac{1}{3}x^3)^2$

构造步骤：$\tan x>x\Rightarrow\tan^2x>x^2\Rightarrow\tan^2x+1=\sec^2x>x^2+1$

积分 $\tan x>\frac{x^3}{3}+x$.

例4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$.

法一. 取对数. 积→和. 记 $a_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$

$\ln a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})$　　由 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$

$\therefore\frac{k}{n^2+k}<\ln(1+\frac{k}{n^2})<\frac{k}{n^2}$

$\therefore\frac{1}{2}\leftarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}<\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(\frac{k}{n^2+k})=\frac{1}{2}$　$\therefore I=\sqrt{e}$

另：由 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}}_{\text{三阶}\to0}<\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$

法二. 配对. $\because(1+\frac{k}{n^2})(1+\frac{n-k}{n^2})=1+\frac{1}{n}+\frac{k(n-k)}{n^4}$

$\therefore 1+\frac{1}{n}\le(1+\frac{k}{n^2})(1+\frac{n-k}{n^2})\le1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}$ (基本不等式)

$\therefore\sqrt{(1+\frac{1}{n})^n}\le a_n\le\sqrt{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2})^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}=\sqrt{e}$. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2})^{\frac{n}{2}}=\sqrt{e}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{e}$

例5. 证明 e是无理数.

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. $\theta\in(0,1)$.

$\therefore e = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$

若 e 为有理数, 记 $e=\frac{p}{q}$ ($p,q\in Z^+$. $(p,q)=1$). 又 $2<e<3$.

$\frac{p}{q} = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$

两边同乘 $n!$ $(n\geq p)$. $\underbrace{n!(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{n!})}_{\in Z}+\frac{e^{\theta}}{n+1} = \underbrace{n!\frac{p}{q}}_{\in Z}$

而当 $n\geq 2$ 时 $0<\frac{e^{\theta}}{n+1}<\frac{3}{n+1}\leq 1$ $\therefore \frac{e^{\theta}}{n+1}\notin Z$ 矛盾. $\therefore e$ 为无理数.

例6. 证明: $1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\to e$.

法一. Taylor 展开. $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\to 0$.

法二. $a_n=(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})+\cdots$

$\therefore 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})$ 取前m项 $<a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$n\to\infty$ 时 $1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}\leq a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$b\leq\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\leq b$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=b=e$.

6. Taylor 展开的应用: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有3阶连续导数 则根据 Taylor 定理 $\forall x\in[a,b]$.

$\exists \xi\in(a,b)$ s.t. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{6}(x-x_0)^3$

其中 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 对称的函数 将 $x=a$. $x=b$ 分别代入可得

$$\begin{cases} f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(a-x_0)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}(a-x_0)^3 & (1)\\ f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(b-x_0)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{6}(b-x_0)^3 & (2)\end{cases}$$

无 $f'''(x)$ 信息时. (1)−(2)得 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0)+\boxed{\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}}\frac{(b-a)^3}{24}$

若 $f'''(x)$ 连续 $\exists f'''(\xi)=\frac{1}{2}f'''(\xi_1)+\frac{1}{2}f'''(\xi_2)$

($f'''(x)$ 存在 $\Rightarrow f''(x)$ 连续)

若 $f'''(x)$ 不一定连续，由Darboux定理(导函数介值性)知，$\exists f'''(\xi) = \frac{1}{2}f'''(\xi_1) + \frac{1}{2}f'''(\xi_2)$

∴若 $f'(\frac{a+b}{2}) = 0$ 则 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f'''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3}(f(b)-f(a))$

无 $f'(x)$ 信息时，(1)+(2)得 $f(a)+f(b) = 2f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{4}(b-a)^2 + \frac{f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)}{2}\frac{(b-a)^3}{24}$

∵ $f'''(x)$ 连续，由介值定理知 $\frac{1}{2}|f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)| \le \frac{1}{2}|\max f'''(x) - \min f'''(x)|$

$\le \max\limits_{a\le x\le b}|f'''(x)| \triangleq M$ 　　若 $f''(\frac{a+b}{2}) = 0$，则

$M \ge \left|\frac{f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)}{2}\right| = \frac{24}{(b-a)^3}\left|f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})\right|$

或 $|f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})| \le \frac{(b-a)^3}{24}M$

例1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 二阶可导，证明：$\exists c \in (a,b)$ s.t. $f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$

由Taylor定理知，$\forall x \in [a,b]$，$\exists \xi \in (a,b)$ s.t.

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$ 　其中 $x_0 = \frac{a+b}{2}$

将 $x=a$，$x=b$ 代入得 　　不涉及 $f'''(x)$：展开至一阶+二阶余项

$f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a-x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x_0)^2$ (1) 　$\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$

$f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b-x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x_0)^2$ (2)

目标无 $f'(x)$：(1)+(2)得 $f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b) = \frac{(b-a)^2}{4}\cdot\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$

由Darboux定理知，$\exists c \in (a,b)$ s.t. $f''(c) = \frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$

∴ $f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$

例2. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上存在二阶连续导数，且 $f(0)=1$，$f(-2)=f(2)=17$，证明：

$\exists \xi \in (-2,2)$ s.t. $f''(\xi) = 8$.

法一：将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开，$\forall x \in [-2,2]$，$\exists \eta \in (-2,2)$ s.t.

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2}x^2 = 1 + f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2}x^2$

将 $x=2$，$x=-2$ 代入，$\exists \eta_1 \in (-2,0)$，$\eta_2 \in (0,2)$ s.t.

$f(-2) = 1 - 2f'(0) + 2f''(\eta_1)$，$f(2) = 1 + 2f'(0) + 2f''(\eta_2)$

无$f'(0)$信息，两式相加得 $f(-2)+f(2)-2=2[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]=8. \Rightarrow \exists \xi\in(-2,2)$ s.t. $f''(\xi)=8.$

法二：拟合法. 过$(0,1),(-2,17),(2,17)$二次曲线为 $g(x)=4x^2+1$

记 $h(x)=f(x)-g(x)$. $h(x)$在$[-2,2]$二阶可导. 且$h(-2)=h(0)=h(2)=0$.

由Rolle定理知，$\exists x_1\in(-2,0)$, $x_2\in(0,2)$ s.t. $h'(x_1)=h'(x_2)=0$

在$[x_1,x_2]$上再应用Rolle定理知. $\exists \xi\in(-2,2)$ s.t. $h''(\xi)=0$

而$h''(\xi)=f''(\xi)-8$. $\therefore \exists \xi\in(-2,2)$ s.t. $f''(\xi)=8$.

例3. 设$f(x)$在$(0,a]$上二阶连续可导. 且$f''(0)\neq 0$. $f(x)=f(0)+f'(\theta(x)x)x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\frac{1}{2}$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$ (Peano)

$f(x)=f(0)+f'(\theta x)x$ (Lagrange)

$\Rightarrow f'(\theta x)x=f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2) \Leftrightarrow f'(\theta x)-f'(0)=\frac{f''(0)}{2!}x+o(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\theta\cdot\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\theta\cdot f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)=\frac{f''(0)}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\frac{1}{2}$.

例4. 设f在$[0,1]$上二阶可导. $f(0)=0=f(1)$ $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$. 证明：$\exists x_0\in(0,1)$. s.t. $f''(x_0)\geq 8$.

f_{min}在闭区间内取得：极值 $\Rightarrow f'(x)=0$

不妨设 $f(c)=-1$. $c\in(0,1)$.

$\therefore f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2=f(c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$

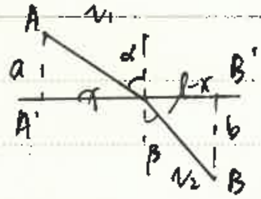
$$\begin{cases} f(0)=f(c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2=0 \\ f(1)=f(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2} \\ f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2} \end{matrix}$$

当 $c\in[0,\frac{1}{2}]$时, $\frac{2}{c^2}\geq 8$.

当 $c\in[\frac{1}{2},1]$时. $(1-c)\in[0,\frac{1}{2}]$. $\therefore \frac{2}{(1-c)^2}\geq 8$. $\therefore \exists x_0\in(0,1)$ s.t. $f''(x_0)\geq 8$

例5. 证明光的折射定律.

$$t'' = \frac{1}{v_1}\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2}\frac{b^2}{[(l-x)^2+b^2]^{\frac{3}{2}}} > 0.$$



$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2+b^2}}{v_2} \quad (0 \le x \le l)$$

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{1}{v_1} - \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+b^2}}\cdot\frac{1}{v_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}.$$

数学模型：t_{min}

注：泰勒展开与线性空间的关系：$P_n[x]$：$1, x, \dots, x^{n-1}$ ($1, x-x_0, \dots, (x-x_0)^{n-1}$) 作基.

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^{n-1} \quad a_k = \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} \text{ 坐标}$$

$$= b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^{n-1} \quad b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$$ 过渡矩阵

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

§5 应用举例

1. 函数的单调性：定义：设 f 是定义在区间 D 上的函数，若对 $\forall x_1<x_2\in D$，均有 $f(x_1)\le f(x_2)$，则称 f 在 D 上单调递增

对 $\forall x_1, x_2\in D$，若 $(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))\ge 0$，则称 f 在 D 上单调递增

区间 D 称为函数 f 的单调区间

函数单调区间的可能分界点：(1) 不可导点，(2) 驻点

判别定理：如果 $f(x)$ 在区间 I 内可导，则若 $f'(x)\ge 0$，则 $f(x)$ 在 I 内单调递增，若 $f'(x)\le 0$，则 $f(x)$ 在 I 内单调递减

证明：不妨设 $\forall x\in I$，$f'(x)\ge 0$

$\forall x_1<x_2\in I$，$\because f$ 在区间 I 内可导 $\therefore f$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导

由 Lagrange 中值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，s.t.

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\ge 0$ $\therefore f$ 在 I 内单调递增

例1. 求 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ 单调区间

令 $f'(x)=\frac{2(x^3-1)}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$	极小	$\uparrow$

$\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)\uparrow$，在 $(-\infty,0)$，$(0,1)\downarrow$

例2. 求 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 单调区间

令 $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0 \Leftrightarrow x=1$　f 在 $x=0$ 处不可导，分点 $x_1=0$，$x_2=1$ 将定义域分成3部分

例3. 证明：(1) $\sin x+\tan x>2x$　(2) $\sin x\cdot\tan x>x^2$　$(0<x<\frac{\pi}{2})$

(1) 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$　$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2 \underset{\sec x>1}{\overset{\sec x>1}{>}} \cos x+\sec x-2 \ge 0$ 基本不等式

(2) 令 $g(x)=\sin x\tan x-x^2$　$g'(x)=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x \ge \sin x+\sin x\sec x-2x$

$= \sin x + \tan x - 2x > 0$

例4. 证明: $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x \quad (x>0)$

法一. 记 $f(x) = x - \ln(1+x)$. $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$

则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} > 0$ $\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)\uparrow$. 又 $f(0)=0$ $\therefore$ 当 $x>0$ 时 $\ln(1+x) < x$.

$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. $\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)\uparrow$. 又 $g(0)=0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时 $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$

法二. 原不等式等价于 $\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} < 1$

令 $f(t) = \ln(1+t)$. $f(t)$ 在 $[0,x]$ 连续, 在 $(0,x)$ 可导

由Lagrange中值定理. $\exists \xi \in (0,x)$ s.t. $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi}$

而 $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1$ $\therefore \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$

例5. 证明: $\arctan x > x - \frac{x^3}{3} \quad (x>0)$

令 $f(x) = \arctan x - (x - \frac{x^3}{3})$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - (1-x^2) = \frac{x^4}{1+x^2} > 0$.

变式: 证明: $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \quad (x>0)$

例6. 求 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \cdots, \sqrt[n]{n} \cdots$ 中最大的数

设 $f(x) = \sqrt[x]{x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e$

当 $0<x<e$ 时 $f(x)$ 单调递增. 当 $x>e$ 时 $f(x)$ 单调递减 $\therefore f(x)$ 在 $x=e$ 时取 max.

$f_{max}(x) = e^{\frac{1}{e}}$ 又 $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ $\therefore 1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \cdots$ $\therefore$ 最大项 $\sqrt[3]{3}$.

变式: $e^{\pi} > \pi^{e}$. $(\pi \ln e > e\ln\pi \Leftrightarrow \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln\pi}{\pi})$

例7. $f(x) = 2nx(1-x)^n \ (n \in N^+)$. 记 $M_n = \max\limits_{0\le x\le 1} f(x)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$.

令 $f'(x) = 2n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n+1}$

当 $0<x<\frac{1}{n+1}$ 时 $f'(x)>0$. 当 $\frac{1}{n+1}<x<1$ 时 $f'(x)<0$ $\therefore f(x)$ 在 $x=\frac{1}{n+1}$ 时取最大值

$M_n = \frac{2n}{n+1}(\frac{n}{n+1})^n$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} M = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n = 2e^{-1}$

例8. 设 $n\in N^*$, $(1+\frac{1}{n})^{n+\beta}\le e\le(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}$, 求 α_{min}, β_{max}

背景: $\{(1+\frac{1}{n})^{n}\}\uparrow$, $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}\downarrow$

$\alpha\downarrow$ $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}<e$, $\beta\uparrow$, $(1+\frac{1}{n})^{n+\beta}>e$ ∴求 α_{min}, β_{max}

$(1+\frac{1}{n})^{n+\beta}\le e \Leftrightarrow (n+\beta)\ln(1+\frac{1}{n})\le 1 \Leftrightarrow \beta\le\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}-n\le\alpha$

令 $x=\frac{1}{n}$ ∴ $\beta\le\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\le\alpha$

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\ (0<x\le 1)$ $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}$

令 $g(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$ $g'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)$

$g''(x)=\frac{2(x-\ln(1+x))}{2}>0$ ∴ $g'(x)$ 在 $(0,1]\uparrow$ $g'(x)>g'(0)=0$

∴ $g(x)$ 在 $(0,1]\uparrow$. ∴ $g(x)>g(0)=0 \Rightarrow f'(x)<0$. ∴ f 在 $(0,1]\downarrow$

∴ $f(1)\le f(x)<f(0+0)$ ($x=0$处无定义, 可去间断点, 用右极限替代.)

$f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$ $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$

∴ $\alpha\ge\frac{1}{2}$, $\beta\le\frac{1}{\ln 2}-1$

注: $\frac{1}{\ln 2}-1\le\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}\ (0<x\le 1)$

例9. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}+\alpha}$ 证明 $f(x)$ 在 $(0,1]\uparrow \Leftrightarrow \alpha\ge\frac{1}{2}$.

$f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}+\alpha}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(x+1)+(\frac{1}{x}+\alpha)\frac{1}{x+1}\right)$ 则 $f(x)$ 在 $(0,1]\uparrow \Leftrightarrow f'(x)\ge 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}\ln(x+1)+(\frac{1}{x}+\alpha)\frac{1}{x+1}\ge 0 \Leftrightarrow \alpha\ge\frac{x+1}{x^2}\ln(x+1)-\frac{1}{x}$

记 $g(x)=\frac{x+1}{x^2}\ln(x+1)-\frac{1}{x}=\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}$. $g'(x)=\frac{2x-(x+2)\ln(1+x)}{x^3}$

令 $h(x)=\frac{2x}{x+2}-\ln(1+x)$. $h'(x)=\frac{-x^2}{(x+1)(x+2)^2}<0$ ∴ $h\downarrow$ 又 $h(0)=0$

∴当 $0<x\le 1$ 时 $h(x)<h(0)=0$ ∴当 $0<x\le 1$ 时 $g'(x)<0 \Rightarrow g(x)$ 在 $(0,1]\downarrow$

∴ $g(x)<g(0+0)$ $\lim\limits_{x\to 0+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{(1+x)(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-x}{x^2}=\frac{1}{2}$

∴ $g(x)<\frac{1}{2}$ ∴ $\alpha\ge\frac{1}{2}$

注: $x_n=(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}$. $\{x_n\}\downarrow \Leftrightarrow \alpha\ge\frac{1}{2}$

对一段无要求
只有一点与一段的大小比较

2. 函数的极值与最值：定义：设$f(x)$在x_0的某邻域内有定义，如果$\exists\,\delta>0$，对$\forall x\in U(x_0,\delta)$均有$f(x)\geq f(x_0)$

端点处无完整邻域

（或$f(x)\leq f(x_0)$），则称$f(x)$在x_0处有极大值（或极小值）

极值存在的必要条件（Fermat定理）：如果$f(x)$在x_0处有极限，且$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0$

由此定理可得，可能极值点为(1)不可导点 (2)驻点

极值存在的充分条件：第一充分条件：若$f(x)$在x_0处连续，且$\exists\,\delta>0$，$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$可导

(1) 当$x\in\mathring{U}_-(x_0,\delta)$时，$f'(x)>0$，当$x\in\mathring{U}_+(x_0,\delta)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$x_0$处有极大值

(2) 当$x\in\mathring{U}_-(x_0,\delta)$时，$f'(x)<0$，当$x\in\mathring{U}_+(x_0,\delta)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$x_0$处有极小值

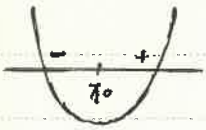
(3) 如果$f'(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内不变号，则$f(x)$在x_0处没有极值

第二充分条件：若f在$U(x_0,\delta_0)$内一阶可导，在x_0处二阶可导，且$f'(x_0)=0$

(1) 若$f''(x_0)>0$，则$f(x)$在x_0处有极小值

(2) 若$f''(x_0)<0$，则$f(x)$在x_0处有极大值

(3) 若$f''(x_0)=0$，则$f(x)$在x_0处可能有极值，也可能没有极值



证明：法一：$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

若$f''(x_0)>0$，则$\exists\,\delta>0$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$

$\therefore$当$x\in\mathring{U}_-(x_0,\delta)$时，$f'(x)<0$，当$x\in\mathring{U}_+(x_0,\delta)$时，$f'(x)>0$

则$f(x)$在x_0处有极小值，同理$f''(x_0)<0$时$f(x)$在x_0处取极大值

法二：将$f(x)$在x_0处进行Taylor展开

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$=\Big[\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\Big](x-x_0)^2$$

$+$ 为说明$\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$占主导作用

又$f''(x_0)\neq0$ $\therefore\exists\,\delta\,(\delta<\delta_0)>0$

当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时 $\dfrac{f''(x_0)}{2}+o(1)$与$f''(x_0)$同号 $(o(1)\to0)$

$\therefore$当$f''(x_0)>0$时$f(x)$在x_0处取极小值；当$f''(x_0)<0$时$f(x)$在x_0处取极大值

例1. 求 $f(x)=4x^2+3\ln(1-x^2)$ 的极值.

定义域 $-1<x<1$. 令 $f'(x)=8x-\frac{6x}{1-x^2}=\frac{2x(1-4x^2)}{1-x^2}=0$ 则 $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{2}$.

法一: 第一充分条件: 当 $-1<x<-\frac{1}{2}$ 时, $f(x)\nearrow$. 当 $-\frac{1}{2}<x<0$ 时 $f(x)\searrow$.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时 $f(x)\nearrow$. 当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时 $f(x)\searrow$

∴ $f(x)$ 在 $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{2}$ 处取极大值. 且 $f_{max}(-\frac{1}{2})=f_{max}(\frac{1}{2})=1+3\ln\frac{3}{4}$.

$f(x)$ 在 $x_2=0$ 处取极小值. 且 $f_{min}(0)=0$.

法二: 第二充分条件. $f''(x)=8-\frac{6(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ 则 $f''(0)=2>0$, $f''(-\frac{1}{2})=f''(\frac{1}{2})=-\frac{16}{3}$.

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值. 在 $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ 处取极大值.

例2. 求 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

化简: $f(x)=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$ 则 $f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$

当 $x=1$ 时 $f'(x)=0$. 当 $x=0$ 时 $f'(x)$ 不可导

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)\nearrow$. 在 $(0,1)\searrow$. 在 $(1,+\infty)\nearrow$. ∴ $f_{max}(0)=0$. $f_{min}(1)=-3$.

第三充分条件: 设 f 在 x_0 的某邻域内存在 $(n-1)$ 阶导数, 在 x_0 处 n 阶可导

且 $f^{(k)}(x_0)=0$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 则

(1) 当 n 为偶数时 $f(x)$ 在 x_0 处取极值; 且当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时, 有极小值.

当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时, 有极大值.

(2) 当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

证明: 极值本质: $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 处保号.

将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 Taylor 展开:

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

$$=\underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right]}_{\text{主导地位}}\underbrace{(x-x_0)^n}_{\text{偶次保号，奇次不保号}}.$$

3. 函数的最大值与最小值：若f在$[a,b]$上连续，则：f一定存在最大值和最小值

若f的最值在$x_0\in(a,b)$处取得，则f必在x_0处取极值；若f在x_0处可导，则$f'(x_0)=0$，即x_0为$f(x)$的驻点。

由此可得$f(x)$的最值在端点或极值点处取得。（端点+可能极值点）

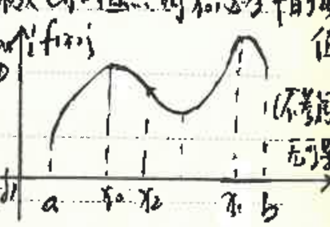
例1. 若f在区间D上连续且在D上仅有一个极值点x_0，证明：若x_0为f的极大(小)值点，则x_0必为f的最大(小)值点。

证明：若f在x_0处不取最大值，不妨设$\exists x_1(>x_0)\in D$，有$f(x_1)=\max\limits_{x\in D}f(x)$

又f在x_0处取极大值，则$\exists\delta>0\ (\delta<x_1-x_0)$，

当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，有$f(x_0)>f(x)$，特别地，取$x_2\in(x_0,x_0+\delta)$

有$f(x_0)>f(x_2)$



（不在端点，找一点比端点小即可）

f在$[x_0,x_1]$上连续，从而f在$[x_0,x_1]$上有最小值，而$f(x_0)>f(x_2)$，$f(x_1)>f(x_2)$

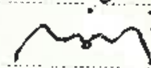
∴f最小值在$\xi\in(x_0,x_1)$处取得 ∴f在ξ处取极小值，这与f仅一个极值点矛盾。

例2. 求$f(x)=2x^3+3x^2-12x-10$在$[-3,3]$上最值。

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)=0\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1$ 又$f(-3)=-1$，$f(-2)=10$，$f(1)=-17$，$f(3)=35$

∴$f(x)$在$x=1$处取最小值且$f_{min}(1)=-17$，在$x=3$处取最大值，且$f_{max}(3)=35$。

注：$f(x_0)$为极值点(极大值) $\not\Rightarrow$ f在$\mathring{U}_-(x_0,\delta)\uparrow$，在$\mathring{U}_+(x_0,\delta)\downarrow$。 只保证大小，不保证单调



如$f(x)=\begin{cases}x^2(1+\sin\frac{1}{x}), & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则$x\neq0$时$f'(x)=2x(1+\sin\frac{1}{x})-\cos\frac{1}{x}$

令$x_n=\frac{1}{2n\pi}$，$f'(x_n)=\frac{1}{n\pi}-1<0$，$y_n=\frac{1}{2n\pi+\pi}$，$f'(y_n)=\frac{2}{2n\pi+\pi}+1>0$

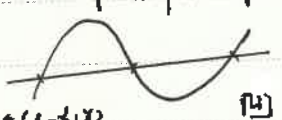
$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ ∴不存在δ s.t. $f'(x)$在$\mathring{U}_-(x_0,\delta)$，$\mathring{U}_+(x_0,\delta)$保号

类似的 $f\nearrow\not\Rightarrow f'(x)\geq0$。

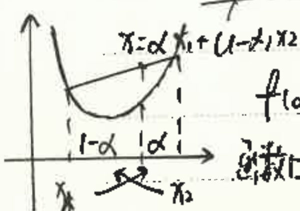
4. 曲线的凹凸性：定义1：设f在D上连续，若对$\forall x_1,x_2\in D$满足$f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称曲线$y=f(x)$为区间D上的凹曲线，函数$y=f(x)$为凹函数。

定义2：设f在D上连续，若对$\forall x_1,x_2\in D$，$\forall\alpha\in(0,1)$均有 $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$，则称曲线$y=f(x)$为$D$上的凸曲线，函数$y=f(x)$为凸函数。

定义3：设f在D上任意点x_0处的切线均在曲线的下方，即在点$(x_0,f(x_0))$处总有 $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，则称曲线$y=f(x)$在$D$上为凸曲线，$f$为凸函数。



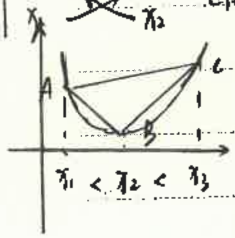
（复杂曲线：与直线交点个数>2：凹）



$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

函数凸性的判别：引理1：f为D上凸函数的充要条件是 对D上任意三点$x_1<x_2<x_3$，

总有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$



利用定义2证明，$\alpha=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$

必要性：记$\alpha=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$，则$x_2=\alpha x_1+(1-\alpha)x_3$

$$f(x_2)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_3)\leq\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_3)$$

$$=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$

$\therefore (x_3-x_1)f(x_2)\leq(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$

又$x_3-x_1=(x_3-x_2)+(x_2-x_1)$ $\therefore \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

充分性：在D上任取两点$x_1<x_3$，$\forall\alpha\in(0,1)$，取$x_2=\alpha x_1+(1-\alpha)x_3$

则$x_1<x_2<x_3$，由$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$可得

$$(x_3-x_1)f(x_2)\leq(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$$

则 $f(x_2)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_3)\leq\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$

$$=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_3)$$

$\therefore f$为D上凸函数。

引理2：f为D上凸函数$\Leftrightarrow$对$\forall x_1<x_2<x_3\in D$，均有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$< \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 即割线斜率递增.

证明: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \Leftrightarrow (x_3-x_1)f(x_2) < (x_2-x_1)f(x_3)+(x_3-x_2)f(x_1)$

$\Leftrightarrow ((x_3-x_2)+(x_2-x_1))f(x_2) < (x_2-x_1)f(x_3)+(x_3-x_2)f(x_1)$

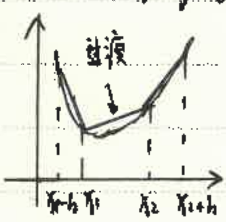
$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

定理1. 设f在D上可导,则下列论断等价: (1) f为D上凸函数. (2) f'在D上单调递增

(3) $\forall x_1, x_2 \in D$ 有 $f(x_2) \geq f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$ (曲线在切线上方)

(1)只有第一类间断点,
单调有界
有极限

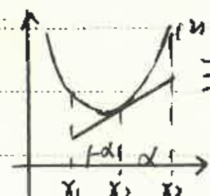
证明: (1)⇒(2): 在D上任取两点 $x_1<x_2$ 及充分小的 $h>0$.



由 $x_1-h<x_1<x_2<x_2+h$ 及 f 的凸性与引理可得

$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$

令 $h \to 0+0$ 有 $f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2) \Rightarrow f'$在$D$上$\uparrow$.



(2)⇒(3): 对$\forall x_1, x_2 \in D$. (不妨设 $x_1<x_2$) 在$[x_1, x_2]$上应用Lagrange中值定理.

$\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 有 $f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1) > f'(x_1)(x_2-x_1)$

$\therefore f(x_2) > f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$

(3)⇒(1): 对$\forall x_1<x_2 \in D$. 及$\forall \alpha \in (0,1)$ 取 $x_3=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$ 则

$f(x_1) \geq f(x_3)+f'(x_3)\underbrace{(x_1-x_3)}_{-(1-\alpha)(x_2-x_1)}$ (1)

$f(x_2) \geq f(x_3)+f'(x_3)\underbrace{(x_2-x_3)}_{\alpha(x_2-x_1)}$ (2)

$\alpha(1)+(1-\alpha)(2)$: $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2) \geq f(x_3) = f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$

$\therefore f$为D上凸函数.

定理2. 设f在$[a,b]$连续,在(a,b)可导,则

(1) 若对$\forall x \in (a,b)$,均有 $f''(x)>0$ 则曲线 $y=f(x)$ 为凸曲线.

(2) 若对$\forall x \in (a,b)$,均有 $f''(x)<0$ 则曲线 $y=f(x)$ 为凹曲线.

法一: 定义: $f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

对$\forall x_0\in(a,b)$ 有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$

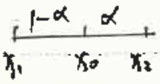
若$f''(x)>0$, 则 $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 曲线为凸曲线

若$f''(x)<0$, 则 $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 曲线为凹曲线

法二: 定义2: $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)>f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$

对$\forall x_1,x_2\in(a,b)$ 及 $\forall\alpha\in(0,1)$. 记 $x_0=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$

将$f(x)$在x_0处展开 有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$



$\therefore f(x_1)>f(x_0)+f'(x_0)(\underbrace{x_1-x_0}_{-(1-\alpha)(x_2-x_1)})$ (1)

$f(x_2)>f(x_0)+f'(x_0)(\underbrace{x_2-x_0}_{\alpha(x_2-x_1)})$ (2)

$\alpha(1)+(1-\alpha)(2)$: $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)>f(x_0)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$

法三: 定义1: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

对$\forall x_1<x_2\in(a,b)$ 有 $2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$

$=\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)\right]-\left[f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]=f'(\xi_1)\frac{x_2-x_1}{2}-f'(\xi_2)\frac{x_2-x_1}{2}$

$=f''(\eta)(\xi_1-\xi_2)\frac{x_2-x_1}{2}<0$.

其中 $\xi_1\in\left(x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, $\xi_2\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$, $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$

$\therefore f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ $\therefore y=f(x)$为凸曲线.

5. 曲线的拐点: 定义: 连续曲线$y=f(x)$上凸凹性发生变化的点称为拐点. (拐点是点)

定理: 设$(x_0,f(x_0))$是$y=f(x)$的拐点 且$f''(x_0)$存在 则$f''(x_0)=0$.

不妨设 $y=f(x)$分别在$(x_0-\delta,x_0)$, $(x_0,x_0+\delta)$内为凹曲线和凸曲线. 则$f'(x)$在

$(x_0-\delta,x_0)$内↓, 在$(x_0,x_0+\delta)$内↗.

则 $f''_-(x_0)=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}\le0$, $f''_+(x_0)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}\ge0$

而 $f''_-(x_0)=f''_+(x_0)$ $\therefore f''(x_0)=0$

可能拐点: (1)二阶导数不存在的点. (2)二阶导数为0的点.

定理：设 $f(x)$ 在 x_0 处存在 $n(\geq 3)$ 阶导数且 $f^{(k)}(x_0)=0$，$(k=2,\cdots,n-1)$ 而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，那么，

如果 n 为奇数，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，

如果 n 为偶数，则 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

例1. 求 $f(x)=\ln(1+x^2)$ 的凸凹区间与拐点，

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$　令 $f''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0$，则 $x_1=-1$，$x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时，$f''(x)<0$. 当 $-1<x<1$ 时 $f''(x)>0$ 当 $1<x<+\infty$ 时，$f''(x)<0$.

$\therefore$ 函数的凹区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$. 凸区间为 $(-1,1)$

拐点为 $(-1,\ln 2)$，$(1,\ln 2)$

例2. 求曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的凸凹区间与拐点，

$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}$　令 $y''=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}=0$. 则 $x_1=-1$，$x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时 $f''(x)>0$. 当 $-1<x<1$ 时 $f''(x)<0$ 当 $1<x<+\infty$ 时 $f''(x)>0$.

$\therefore$ 函数的凸区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$. 凹区间为 $(-1,1)$

拐点为 $(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$ 和 $(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$

例3. 若 f 是定义在 (a,b) 内可导的凸函数，则 $x_0\in(a,b)$ 为 f 的极小值点的充要条件是 $f'(x_0)=0$.

(即 x_0 为 f 的驻点。)

必要性：由Fermat定理可得

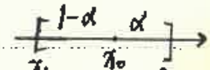
水平切线

充分性：$\forall x(\neq x_0)\in(a,b)$. 由于 f 是 (a,b) 内的凸函数，则 $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=f(x_0)$

$\therefore$ f 在 x_0 处取极小值　　　结论：凸函数的驻点是极小值.

例4. 设 f 为 (a,b) 内的凸函数，且不是常函数，求证：f 在 (a,b) 内没有最大值.

若 f 在 $x_0\in(a,b)$ 处取最大值，则 $\forall x_1<x_0<x_2$，$x_1,x_2\in(a,b)$ 有

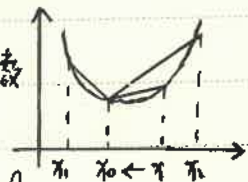


$$f(x_0)\leq\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)\leq\left(\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}\right)f(x_0)=f(x_0)$$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)=f(x_0)$　$\therefore$ f 为 (a,b) 上常函数.　　(利用 $f(x_0)\leq(1-\alpha)f(x_1)+\alpha f(x_2)\leq f(x_0)$)

注：若f是$[a,b]$上的凸函数，则$f(x)\le \max\{f(a),f(b)\}$.

例5. 设$f(x)$是(a,b)内的凸函数，证明：$f(x)$在(a,b)内连续.



对$\forall x_0\in(a,b)$，取$x_1, x, x_2\in(a,b)$且$x_1<x_0<x<x_2$. ∵f是(a,b)内凸函数

$$\therefore \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

即 $\dfrac{x-x_0}{x_0-x_1}[f(x_0)-f(x_1)]+f(x_0)\le f(x)\le \dfrac{x-x_0}{x_2-x_0}f(x_2)+\dfrac{x_2-x}{x_2-x_0}f(x_0)$

令$x\to x_0^+$　由夹逼定理得$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$　∴$f(x)$在x_0处右连续

同理 $f(x)$在x_0处左连续　∴$f(x)$在x_0处连续

6. Jensen不等式：设$f(x)$在$[a,b]$内满足$f''(x)>0$，则$\forall \alpha_i>0$，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$，且$\forall x_i\in[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有 $f(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\le\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$ $(n\ge 2)$

(即 $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)\le\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$)

证明：数归：∵$f''(x)>0$ ∴$f(x)$为$[a,b]$上凸函数.

(1) 当$n=2$时，$\forall\alpha_1,\alpha_2>0$，$x_1,x_2\in[a,b]$有

$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\le\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$.

(2) 假设n时成立，即$f(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\le\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$，则当$n+1$时有

$$f(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i)\ \underset{\text{与}n+1\text{项}}{\overset{\text{定义,拆分前}n\text{部分}}{=\!=\!=}}\ f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i+\alpha_{n+1}x_{n+1})=f\Big((1-\alpha_{n+1})\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}}_{\text{归化}}x_i+\alpha_{n+1}x_{n+1}\Big)$$

$$\le(1-\alpha_{n+1})f(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}x_i)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})$$

$$\le(1-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}f(x_i)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f(x_i)$$

例1. 设A, B, C为△ABC三个角，证明：$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt3}{2}$.

记$f(x)=\sin x$ $(0<x<\pi)$，则$f''(x)=-\sin x<0$.

∴$f(x)=\sin x$为$(0,\pi)$内的凹函数；根据Jensen不等式，有

$f(\frac{A+B+C}{3})\ge\frac13(f(A)+f(B)+f(C))$，∴$\frac13(\sin A+\sin B+\sin C)\le\sin\frac{A+B+C}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$

∴$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac32\sqrt3$

例2. 证明: 加权均值不等式. ($\forall \alpha_i>0$, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$, $x_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$) 有 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \ge \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$

乘积形式: 取对数. 只需证 $\ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \ge \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ln x_i$

令 $f(x)=\ln x$. $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ ∴ $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 内的凹函数

由Jensen不等式知 $f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\ge\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) \Leftrightarrow \ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\ge\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln x_i$

注: 当 $\alpha_k=\frac{1}{n}$ 时, $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ $(x_k>0, k=1,2,\cdots,n)$

例3. Young不等式: 若 $x,y\ge0$, $p,q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明 $x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\le\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$

(1) $x=0$或$y=0$时显然 (2) $x,y>0$时. 令 $\frac{1}{p}=\alpha$, $\frac{1}{q}=\beta$. 不等式等价于 $\alpha\ln x+\beta\ln y\le\ln(\alpha x+\beta y)$.

令 $f(x)=\ln x$. $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$. ∴ $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上凹函数.

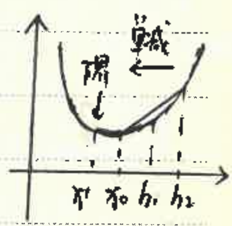
∴ $\forall x,y>0$, $f(\alpha x+\beta y)\ge\alpha f(x)+\beta f(y) \Leftrightarrow \ln(\alpha x+\beta y)\ge\alpha\ln x+\beta\ln y$.

例4. Minkowski不等式: $\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$x_i,y_i\ge0$ $(i=1,\cdots,n)$, $p\ge1$. 当且仅当 x_k, y_k 成比例时取等.

例5. 设f是区间D内的凸(凹)函数. 证明: f在D内任意一点处均存在左、右导数, 从而 f在D内连续.

设f为D内的凸函数. $\forall x_0\in D$, $\forall 0<h_1<h_2$ s.t. x_0+h_1, $x_0+h_2\in D$.



∵ f为凸函数 ∴ $\frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}<\frac{f(x_0+h_2)-f(x_0)}{h_2}$

记 $F(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 再取 $x'\in D$, 且 $x'<x_0$.

∴ $F(h)\uparrow$, 且 $F(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>\frac{f(x_0)-f(x')}{x_0-x'}$

∴ 当 $h\to0$ 时 $F(h)$ 有下界 $\frac{f(x_0)-f(x')}{x_0-x'}$ (不一定可导, 左右导不一定相等)

∴ $\lim_{h\to0+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_+(x_0)$ 存在 ∴ f在x_0处右可导 ∴ f在x_0处右连续

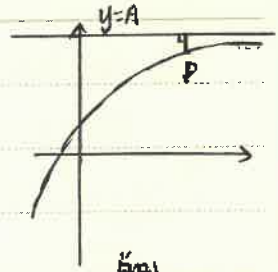
同理, f在x_0处左可导, 左连续 ∴ f在D上连续

7. 曲线的渐近线: 设有曲线C, 如果存在直线L, 当C上的点P无限远离原点时, 点P到直线L的距离趋向于0,

则称L为C的渐近线.

渐近线考虑单侧极限 +/-两个方向都要考虑.

1. 水平渐近线: $y=A$ 直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}f(x)=A$

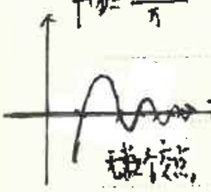


例1. 求 $y=\arctan x$ 的水平渐近线.

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$

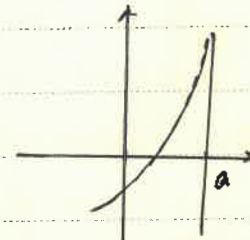
∴渐近线为 $y=-\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$.



注:渐近线与曲线可交;与端点有无定义无关(无限远点)

端点个点. 2. 竖直渐近线: $x=a$ 直线 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^{\pm}0} f(x)=\infty$.

单侧



例2. 求 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

$\lim\limits_{x\to0+0}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=1$

∴渐近线为 $x=0$, $y=1$

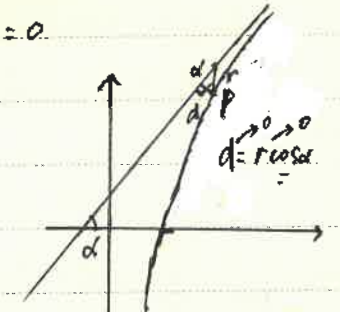
注:可以有无数条竖直(铅垂)渐近线.

初等函数无定义点

3. 斜渐近线: $y=ax+b$ $(a\neq0)$ 直线 $y=ax+b$ 为 $y=f(x)$ 渐近线

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} x[\frac{f(x)}{x}-(a+\frac{b}{x})]=0$

∴ $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$



两方向

水平+斜:至多两条.

例3. 求 $y=x+\sqrt{x^2+4x+7}$ 的渐近线

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+4x+7}) \xlongequal{x=-u} \lim\limits_{u\to+\infty}(\sqrt{u^2-4u+7}-u)$

负:相反数

变换(取绝对值问题)

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{-4u+7}{\sqrt{u^2-4u+7}+u}=-2$

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+4x+7}}{x}=2$ $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+4x+7}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+7}{x+\sqrt{x^2+4x+7}}=2$

∴渐近线 $y=-2$, $y=2x+2$

例4. 求 $f(x)=\frac{x(x+2)}{x-1}$ 渐近线.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$ $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-1}=3$

∴渐近线 $x=1$, $y=x+3$.

例5. 求 $y=\frac{x^2+2}{x-1}+\ln(1+e^x)$ 渐近线.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$. $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{x^2+2}{x(x-1)}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=1$ $b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=1$

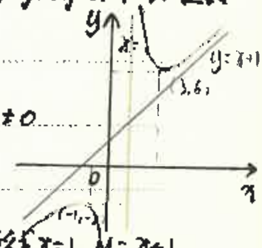
$a=\lim\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{x^2+2}{x(x-1)}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=2$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+2}{x-1}+\ln\frac{1+e^x}{e^x})=1$

∴渐近线 $x=1$, $y=x+1$, $y=2x+1$

8. 函数图形的描绘：(1) 确定定义域，分析初等性态（奇偶，对称性）(2) 求出 $f'(x)=0$ 及 $f'(x)$ 不存在的点；$f''(x)=0$ 及 $f''(x)$ 不存在的点，；上述点将定义域分成若干个小区间，判断每个小区间中 $f'(x)$，$f''(x)$ 符号，从而得到 $f(x)$ 单调区间，极值；曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点等 (3) 求出曲线的渐近线（曲线的变动趋势），(4) 将曲线上的特殊点（截距点，极值点，拐点等）用光滑连续曲线连接

例. 描绘 $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ 图形



(1) $D_f: x\neq 1$ (2) $y'=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=3$ $y''=\frac{8}{(x-1)^3}\neq 0$

$\therefore f$ 在 $(-\infty,-1)$ ↗，在 $(-1,1)$ ↘，在 $(1,3)$ ↘，在 $(3,+\infty)$ ↗

(3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$ $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=1$ ∴渐近线 $x=1$，$y=x+1$.

例1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$ 型：通分 $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)]^2-[x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)]}{x^4}=-\frac{1}{6}$

例2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$

1^∞ 型 $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\sin\pi[\sqrt{1+4n^2}-2n]\right)^{\frac{1}{\sin\pi[\sqrt{1+4n^2}-2n]}}\right]^{n\sin\pi[\sqrt{1+4n^2}-2n]}$

$=\exp\left\{\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right\}=e^{\frac{\pi}{4}}$

例3. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}, & x\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$ (1) 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续性与可导性 (2) $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续性.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$ $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(e^x-1-x)-x(e^x-1)}{2x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)]-x[x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)]}{2x^3}=-\frac{1}{12}$

(2) $x\neq 0$ 时 $f'(x)=\frac{x^2e^x-(e^x-1)^2}{x^2(e^x-1)^2}$ $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2}{x^4}=-\frac{1}{12}$

$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例4. 设 $f(x)$ 为可导偶函数，且在 $U(0)$ 满足 $f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=x^2+o(x^2)$. 求 $y=f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处切线方程.

令 $x\to 0$ $f(1)=0$. 又 $f(x)$ 为偶函数 $\therefore f(-1)=0$. $P(-1,0)$ $f'(-1)=-f'(1)$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}$

配凑

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\boxed{\frac{f(1+(e^{x^2}-1))}{e^{x^2}-1}}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-3\boxed{\frac{f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}\right)$$

$$=f'(1)-3f'(1)=-2f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1 \quad \therefore f(1)=f'(1)=-\frac{1}{2} \quad \therefore y=-\frac{1}{2}(x+1).$$

例5. $f(x)$在$[0,1]$可导，且$f(0)=f'(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：(1) $\forall\lambda>0$，$\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $(\xi-1)f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$. (2) $\exists\eta\in(0,1)$ s.t. $f'(\eta)=\frac{1}{2012}$.

(1) 即 $(x-1)f'(x)+\lambda f(x)=0$ 有解. 构造 $F(x)=(1-x)^\lambda f(x)$

则$F(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导 且$F(0)=F(1)=0$

由Rolle定理，$\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $F'(\xi)=0$ 即 $(\xi-1)f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$

(2) 由Lagrange中值定理 $\exists x_0\in(0,1)$ s.t. $f'(x_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$

又 $f'(0)=0$，$f'(x_0)=1$ 由Darboux定理 $\exists\eta\in(0,1)$ s.t. $f'(\eta)=\frac{1}{2012}$

§1 不定积分的概念和运算法则

1. 不定积分的概念：原函数：设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，如果存在可导函数 $F(x)$ 满足：对 $\forall x \in I$ 均有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的<u>一个原函数</u>.

例：$\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数. $\cos x$ 是 $(-\sin x)$ 的一个原函数.

一个函数的原函数不唯一. 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数（C 为常数）

若 $F(x)$、$G(x)$ 均为 $f(x)$ 原函数，则 $F(x)=G(x)+C$（Lagrange 中值定理推论）

注：原函数存在但求不出不定积分的例子：$\int e^{x^2}dx$，$\int \cos(x^2)dx$

不定积分：若 $f(x)$ 在区间 I 上存在一个原函数，则 $f(x)$ 的<u>所有原函数</u>组成的集合称为 $f(x)$ 的不定积分

记作 $\int f(x)\,dx$.（函数类） 由定义知 $\underbrace{\int}_{积分号} \underbrace{f(x)}_{被积函数} \underbrace{dx}_{积分表达式} = \overbrace{F(x)}^{积分变元} + C \to$ 任意常数 （不可比较大小）

$\int f$（与映射关系有关与自变量无关）.

2. 不定积分的性质：若 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 I 上存在原函数 $F(x)$、$G(x)$，则 （连续函数必有原函数）

(1) $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ (2) $\int F'(x)dx=F(x)+C$

(3) $\int [f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ (4) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ （线性性）

注：有第一类间断点，函数不可积.（间断点破坏原函数导数介值性） 无介值 $f=F'$

3. 基本积分公式：(1) $\int dx=x+C$ (2) $\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$ [幂函数积分不顶格写，给常数留空间]

(3) $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$（若不加 ||，则 $x>0$） (4) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (a>0 且 a\neq1)$.

(5) $\int e^x dx=e^x+C$ (6) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

(7) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ (8) $\int \sec^2 x=\tan x+C$ 比导数公式少三个

(9) $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$ (10) $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$ (1) $(\log_a x)'$（换底公式）

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$ (12) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$ (2) $\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\pm\frac{1}{1+x^2}$.

(13) $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

特别地 $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$

4.直接积分法：利用积分公式与积分性质直接积分

(初等变换)

例1. $\int \frac{x^3+3x^2+x-3}{x^2+1}dx = \int \frac{x(x^2+1)+3(x^2+1)-6}{x^2+1}dx = \int [x+3-\frac{6}{x^2+1}]dx = \frac{1}{2}x^2+3x-6\arctan x+C$

例2. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}(x-\sin x)+C$

例3. $\int \frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx = \int \frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx = \int \sec^2x\,dx+\int \csc^2x\,dx = \tan x-\cot x+C$

例4. $f(x)=\begin{cases}\cos x-x^2+1, & x\le 0,\\ 2e^x, & x>0.\end{cases}$ 求 $\int f(x)dx$.

$\because f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续 $\therefore f$ 原函数存在

当 $x\le 0$ 时 $\int f(x)dx = \int(\cos x-x^2+1)dx = \sin x-\frac{x^3}{3}+x+C_1$

当 $x>0$ 时 $\int f(x)dx = \int 2e^x dx = 2e^x+C_2$

$\therefore F(x)=\begin{cases}\sin x-\frac{x^3}{3}+x+C_1, & x\le 0,\\ 2e^x+C_2, & x>0.\end{cases}$

$\because F(x)$ 可导 $\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续. $F(0-0)=C_1=F(0+0)=2+C_2 \Rightarrow C_1=C_2+2$.

$\therefore F(x)=\begin{cases}\sin x-\frac{x^3}{3}+x+C+2, & x\le 0,\\ 2e^x+C, & x>0.\end{cases}$

注：有关分段函数的积分，要保证其原函数在分界点处的连续性.

变式：$f(x)=\max\{x^2, x+2\}$，计算 $\int f(x)dx$.

$f(x)=\max\{x^2,x+2\}=\begin{cases}x^2, & x<-1,\\ x+2, & -1\le x\le 2,\\ x^2, & x>2.\end{cases}$

$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x<-1,\\ \frac{1}{2}x^2+2x+C_2, & -1\le x\le 2,\\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x>2.\end{cases} \xRightarrow{\text{连续}} \int f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_2-\frac{7}{6}, & x<-1,\\ \frac{1}{2}x^2+2x+C_2, & -1\le x\le 2,\\ \frac{1}{3}x^3+C_2+\frac{10}{3}, & x>2.\end{cases}$

例5. (1) $\int e^{2x}\pi^x dx = \int (e^2\pi)^x dx = \frac{1}{\ln(\pi e^2)}(\pi e^2)^x+C$

(2) $\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}\sqrt{x^2}}\,dx = \int x^{\frac{5}{6}}dx = \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}+C$

(3) $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C$

5. 第一换元积分法（凑微分）：设 $f(u)$ 存在原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则 $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ 也存在

（中间变量）[fit积分类] 原函数且 $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,\overset{\text{匹配}}{d(\varphi(x))} = F(u)+C = F(\varphi(x))+C$

证明：$\frac{d}{dx}[F(\varphi(x))] = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

注：积分难度不在于表达式是否复杂，在于是否匹配。

如 $\int e^{x^2}dx$ 难以积出，但 $\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}d(x^2) = e^{x^2}+C$

例1. (1) $\int \sin^2 x\cos x\,dx = \int \sin^2 x\,d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

(2) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctan e^x + C$

(3) $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

(4) $\int (ax+b)^{20}dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{20}d(ax+b) = \frac{1}{21a}(ax+b)^{21}+C\ (a\neq 0)$.

常见凑微分公式：(1) $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$ (2) $e^x dx = d(e^x)$ (3) $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$

(4) $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2\pm a^2) = -\frac{1}{2}d(a^2-x^2)$

(5) $\sin x\,dx = -d(\cos x)$ (6) $\cos x\,dx = d(\sin x)$

(7) $\sec^2 x\,dx = d(\tan x)$ (8) $\sec x\tan x\,dx = d(\sec x)$

(9) $\frac{dx}{1+x^2} = d(\arctan x)$ (10) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$

特别地 $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x})$　$\frac{x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}dx = \frac{d(x^2)}{2\sqrt{a^2\pm x^2}} = \pm d(\sqrt{a^2\pm x^2})$

例. (1) $\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \int \arcsin x\,d(\arcsin x)$

$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$

(2) $(ab\neq 0)$ $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int\frac{dx}{b^2\cos^2 x\left(\frac{a^2}{b^2}\tan^2 x+1\right)} = \int\frac{\sec^2 x\,dx}{b^2\left(\frac{a^2}{b^2}\tan^2 x+1\right)} \overset{\text{减少函数类}}{=} \frac{1}{ab}\int\frac{d\left(\frac{a}{b}\tan x\right)}{\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2+1}$

$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C$

例2. $(a>0)$ (1) $\int\frac{dx}{x^2-a^2} \xlongequal[\text{裂项}]{\text{因式分解}} \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

(2) $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

形式

(3) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

(4) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

例4. $\int \sec x\,dx. = \ln|\tan x + \sec x| + C$

法一. $\int \sec x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}dx \xrightarrow[\text{保证分子分母同乘cos}]{\text{分子难凑微分}} \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}$

而 $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

$\therefore I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$

法二. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2})^2} = \int \frac{d(\tan\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}} = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$

$\therefore I = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})| + C$

法三. 上下同乘 $\sec x + \tan x$. $I = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx = \int \frac{d(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \ln|\tan x + \sec x| + C$

$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2 = \ln|\sec x + \tan x|\right)$

$\left(\ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})| = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| \quad \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| = \ln\left|\frac{1+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}}{\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}}\right| = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|\right)$

例5. $\int \frac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx \quad (a^2+b^2 \neq 0).$

法一. 记 $I = \int \frac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx$. $J = \int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}dx$

$bI + aJ = x + C$

$\underbrace{-aI + bJ}_{\text{凑微分决定.}} = \int \frac{-a\sin x + b\cos x}{a\cos x + b\sin x}dx = \ln|a\cos x + b\sin x| + C$

法二 $x = (a\cos x + b\sin x)$ $\quad y = (a\cos x + b\sin x)'$ $\quad \therefore x, y \in L(\cos x, \sin x)$ 基(线性无关)

$\therefore \sin x$ 可被 $a\cos x + b\sin x$, $a\cos x + b\sin x$ 线性表示.

$$I = \int \frac{\frac{-a}{a^2+b^2}(-a\sin x + b\cos x) + \frac{b}{a^2+b^2}(a\cos x + b\sin x)}{a\cos x + b\sin x}dx$$

$$= \frac{bx}{a^2+b^2} - \frac{a}{a^2+b^2}\int \frac{(-a\sin x + b\cos x)}{a\cos x + b\sin x}dx$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}(bx - a\ln|a\cos x + b\sin x|) + C.$$

6. 基本积分公式: (14) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0)$ (15) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(16) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ (17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (a>0)$

(18) $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$ (19) $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$

(20) $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(21) $\int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

(23) $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \ (a>0)$

(24) $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}) + C \ (a>0)$

(25) $\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

(由Darboux, φ'单调 $\to \exists \varphi^{-1}$)

7. 第二换元积分法：设 $f(x)$ 连续，$x=\varphi(t)$ 有连续导数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，如果 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C$.

[化简被积函数] 则 $\int f(x)dx \xlongequal[\varphi'(t)\neq 0]{x=\varphi(t)} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C = F(\varphi^{-1}(x))+C$ 其中

$t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

证明：$\frac{d}{dx}F(\varphi^{-1}(x)) = \frac{d}{dt}F(t)\frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)$

例1. $\int x(x-1)^{2022}dx$.

法一 拆开 $I = \int[(x-1)+1](x-1)^{2022}dx = \int[(x-1)^{2023}+(x-1)^{2022}]dx$

$= \frac{1}{2024}(x-1)^{2024} + \frac{1}{2023}(x-1)^{2023} + C$

法二 令 $x-1=u$ $dx=du$.

$I = (u+1)u^{2022}du = \frac{1}{2024}u^{2024} + \frac{1}{2023}u^{2023} + C$

$= \frac{1}{2024}(x-1)^{2024} + \frac{1}{2023}(x-1)^{2023} + C$

例2 (1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (2) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$.

一次根式(根式里 x 次数为1)：换根式(目的去掉根式) $\sqrt[n]{ax+b} = u$.

(1) 令 $\sqrt{x+1} = u$ 则 $x = u^2-1$, $dx = 2udu$.

$I_1 = 2\int \frac{u}{u+1}du = 2\int(1-\frac{1}{u+1})du = 2u - 2\ln|u+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln(\sqrt{x+1}+1) + C$

(2) 令 $\sqrt{x-1}=u$. 则 $x=u^2+1$. $dx=2u\,du$.

$$I_2=\int\frac{t^2+1}{t}2t\,dt=\frac{2}{3}t^3+2t+C=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}+C$$

例3. $\int\frac{dx}{e^x+1}$

法一: 上下同乘 e^x: $I=\frac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} \xlongequal{凑微} \int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^x+1}\right)d(e^x)=x-\ln(e^x+1)+C$

法二: 令 $e^x=u$. 则 $x=\ln u$. $dx=\frac{1}{u}du$　　将复杂的换掉

$$I=\int\frac{du}{u(u+1)}=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\ln u-\ln(u+1)+C=x-\ln(e^x+1)+C$$

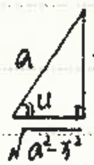
法三: 上下同除 e^x: $I=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

变式: $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$　　$\left(\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$.

例4. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$

二次根式(根式里x次数为2): 三角换元

令 $x=a\sin u$. 则 $du=a\cos u\,du$



x (将x写在对边: $x=a\sin u$ 导数为+).

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2u\,du \xlongequal{降幂} \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2u)du$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}u+\frac{a^2}{2}\sin u\cos u+C \xlongequal{代入} \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

引申: $\int\cos^3u\,du=\int(1-\sin^2u)d(\sin u)$　奇次放入

$\int\cos^4u\,du=\int\left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)^2du=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2u+\cos^2 2u)du$ 再降幂. 偶次降幂

例5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\ (a>0)$

令 $x=a\tan u$. 则 $dx=a\sec^2u\,du$.

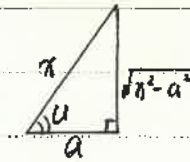
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{1}{a\sec u}a\sec^2u\,du$$

$$=\int\sec u\,du=\ln|\sec u+\tan u|+C \xlongequal{代入} \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

变式: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0)$

令 $x=a\sec u$ 则 $dx=a\sec u\tan u\,du$



$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{1}{a\tan u}a\sec u\tan u\,du=\int\sec u\,du$

$=\ln|\sec u+\tan u|+C\xlongequal{代入}\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

例6. (1) $\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$ (2) $\int\sqrt{1+e^x}\,dx$

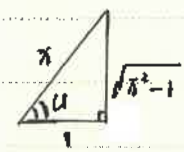
令 $\sqrt{1+e^x}=u$ 则 $x=\ln(u^2-1)$ $dx=\frac{2u}{u^2-1}du$ 换根式

(1) $I_1=\int\frac{1}{u}\frac{2u}{u^2-1}du=\int(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})du=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$

(2) $I_2=2\int\frac{u^2}{u^2-1}du=2\int(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}))du=2u+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$

$=2\sqrt{1+e^x}+\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$

例7 $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$



法一 三角换元 令 $x=\sec u$ 则 $dx=\sec u\tan u\,du$

$I=\int\frac{\sec u\tan u\,du}{\sec^2u\tan u}=\int\cos u\,du=\sin u+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

法二 倒数变换：分母次数较高，关键是降阶

令 $x=\frac{1}{u}$ 则 $dx=-\frac{du}{u^2}$

$I=\int\frac{u^3}{\sqrt{1-u^2}}(-\frac{du}{u^2})du=-\int\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du=\sqrt{1-u^2}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$ (不定积分一般不讨论符号)

变式：$\int\frac{dx}{x(x^{10}+1)}\xlongequal{x=\frac{1}{u}}\int\frac{1}{\frac{1}{u}(\frac{1}{u^{10}}+1)}(-\frac{1}{u^2})du=-\int\frac{u^9}{1+u^{10}}du$

例8 $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

法一 凑微分 $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=-2\int\frac{d\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}}$

法二 配方（二次三项式）$\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{-(x^2-x)}=\frac{1}{2}\sqrt{-(4x^2-4x+1)+1}=\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-1)^2}$

$I=\int\frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=\int\frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=\arcsin(2x-1)+C$

法三 三角换元 $\because 0<x<1$ $\therefore$ 令 $x=\sin^2u$ $dx=2\sin u\cos u\,du$

$I=\int\frac{2\sin u\cos u\,du}{\sin u\cos u}=2u+C=2\arcsin\sqrt{x}+C$

法四：有理根式（根式内为有理分式）：换元 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=u$

$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 令 $\sqrt{\frac{x}{1-x}}=u$，则 $x=\frac{u^2}{u^2+1}$ $dx=\frac{2u\,du}{(u^2+1)^2}$

$I=\int\frac{u^2+1}{u^2}u\frac{2u}{(u^2+1)^2}du=2\arctan u+C=2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$

变式 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(b>a)$

法一：配方 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}-(x-\frac{a+b}{2})^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}}+C=\arcsin\frac{2x-(a+b)}{a+b}+C$

$[\alpha,\ 1-\alpha]$ a x b

$x-a=(b-a)\sin^2u$

法二：三角换元 $\because (x-a)+(b-x)=b-a$ 且 $a<x<b$ $\therefore$ 令 $x-a=(b-a)\sin^2t$

则 $b-x=(b-a)\cos^2t$ 且 $dx=2(b-a)\sin t\cos t\,dt$

$I=\int\frac{2(b-a)\sin t\cos t\,dt}{(b-a)\sin t\cos t}=2t+C=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$

法三：凑微分 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

法四：有理根式换元 $\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\frac{1}{x-a}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$

令 $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}=u$，则 $x=\frac{bu^2+a}{u^2+1}$ $dx=\frac{2(b-a)u}{(u^2+1)^2}du$

$I=\int\frac{u^2+1}{(b-a)u^2}u\frac{2(b-a)u}{(u^2+1)^2}du=2\int\frac{du}{u^2+1}=2\arctan u+C=2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C$

例9. (1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ (2) $\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

二次三项式：配方

(1) $I_1=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln[(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}]+C$

(2) $I_2=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+5)}{\sqrt{x^2+2x+5}}+2I_1=\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln[(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}]+C$

例10. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

法一：分子有理化 $I=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

法二：有理根式换元 令 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=u$ 则 $x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ $dx=\frac{-4u}{(1+u^2)^2}du$

$I=-\int\frac{4u^2}{(1+u^2)^2}du=-\int\frac{2u}{(1+u^2)^2}d(1+u^2)=\int 2u\,d(\frac{1}{1+u^2})$

分部 $\frac{2u}{1+u^2}-2\arctan u+C=\sqrt{1-x^2}-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$

法三. 三角换元. 令$x=\cos u$. 则$dx=-\sin u du$

$$I=\int\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}(-\sin u)du=-2\int\sin^2\frac{u}{2}du\ \underline{\underline{降幂}}\ \int(\cos u-1)du$$
$$=\sin u-u+C=\sqrt{1-x^2}-\arccos x+C$$

法四. 三角换元. 令$x=\sin u$. 则$dx=\cos u du$

$$I=\int\sqrt{\frac{1-\sin u}{1+\sin u}}\cos u du=\int\sqrt{\frac{1-\sin^2 u}{(1+\sin u)^2}}\cos u du=\int\frac{\cos^2 u}{1+\sin u}du$$
$$=\int(1-\sin u)du=u+\cos u+C=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

8. 不定积分中常见的积分变换：原则. (1) 有根号去根号 (2) 反三角化三角 (3) 不熟悉 复杂化熟悉 简单

(1) $\sqrt{ax+b}=u$. 则$x=\frac{u^2-b}{a}$ $dx=\frac{2u}{a}du$

(2) $\sqrt{a^2-x^2}$. 令$x=a\sin u$. 则$dx=a\cos u du$

(3) $\sqrt{x^2+a^2}$. 令$x=a\tan u$ 则$dx=a\sec^2 u du$

(4) $\sqrt{x^2-a^2}$ 令$x=a\sec u$. 则$dx=a\sec u\tan u du$

(5) $\sqrt{e^x+1}=u$. 则$x=\ln(u^2-1)$. $dx=\frac{2u du}{u^2-1}$

(6) $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=u$. 则$x=\frac{du^2-b}{a-cu^2}$. $dx=\frac{2(ad-bc)u}{(a-cu^2)^2}du$

(7) 倒数变换. 令$x=\frac{1}{u}$. 则$dx=-\frac{1}{u^2}du$

9. 分部积分法：设$u=u(x)$. $v=v(x)$均可导函数. 则

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx \quad (分部积分公式)$$

简写为：$\int u dv=uv-\int v du$ (凑微分形式) 两项乘积 减去两项换位

$(d(uv)=udv+vdu\Rightarrow udv=d(uv)-vdu\Rightarrow\int udv=uv-\int vdu)$

例. (1) $\int xe^{-x}dx$ (2) $\int x^2e^{-2x}dx$

幂函数与指数函数乘积：凑指数, 幂函数降次, 减少函数类.

(1) $\int xe^{-x}dx=-\int xd(e^{-x})=-(xe^{-x}-\int e^{-x}dx)=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

(2) $\int x^2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int x^2d(e^{-2x})=-\frac{1}{2}(x^2e^{-2x}-\int xe^{-2x}dx)$

$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}\int x\,d\,e^{-2x} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}(xe^{-2x} - \int e^{-2x}dx)$

$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$

例2. (1) $\int x\sin 3x\,dx$. (2) $\int x\sin^2 x\,dx$

幂函数与三角函数的乘积：凑三角，幂函数降次 ($\sin^2x$, $\cos^2x$先降幂)

(1) $\int x\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\int x\,d(\cos 3x) = -\frac{1}{3}(x\cos 3x - \int\cos 3x\,dx)$

$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C$

(2) $\int x\sin^2 x\,dx \overset{\text{降幂}}{=} \frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$

例3. (1) $\int x^4\ln x\,dx$ (2) $\int x\ln(x-1)\,dx$

幂函数与对数函数的乘积：凑幂函数 (对数难积，求导后化去)

(1) $\int x^4\ln x\,dx = \frac{1}{5}\int\ln x\,d(x^5) = \frac{1}{5}(x^5\ln x - \int x^4dx) = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{1}{25}x^5 + C$

(2) $\int x\ln(x-1)dx = \frac{1}{2}\int\ln(x-1)d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx$

例4. $\int x^2\arctan x\,dx$

幂函数与反三角函数的乘积：凑幂函数 (反三角求导后变为函数类)

$\int x^2\arctan x\,dx = \frac{1}{3}\int\arctan x\,d(x^3) = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int\frac{(x^3+x)-x}{x^2+1}dx = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int(x - \frac{x}{x^2+1})dx$

$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$

例5. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

法一：指数函数与三角函数的乘积：凑指数，三角两次求导后回到原函数类

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}\int\cos bx\,d(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int\sin bx\,d(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$

$\therefore \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$.

同理. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

法二 Euler公式 $e^{(a+bi)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$$\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}+C=\frac{e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)}{a+ib}+C$$

$$\int e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)dx\overset{整理}{=}\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(\cos bx+i\sin bx)(a-ib)+C$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[(a\cos bx+b\sin bx)+i(a\sin bx-b\cos bx)]+C$$

$$\therefore\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+C.$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$$

例1. (1) $\int\ln(x+1)dx$ (2) $\int x\sin^2x\,dx$ (3) $\int\arctan x\,dx$

(1) 直接分部 $I=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C$

(2) $I\overset{降幂}{=}\frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\int x\,d(\sin 2x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$$

(3) 直接分部 $I=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

例2. $\int\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int\arctan x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$

$$\overset{裂项}{=}-\frac{\arctan x}{x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$$

注: 待定系数裂项: $\frac{1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

例3. $\int\sec^3x\,dx=\int\sec x\,d(\tan x)=\sec x\tan x-\int\tan x\cdot\sec x\tan x\,dx$

$$=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2x-1)dx$$

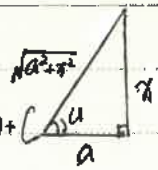
$$=\sec x\tan x-\int\sec^3x\,dx+\int\sec x\,dx$$

$$\therefore\int\sec^3x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\int\sec x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$$

例4. $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx\ (a>0)$

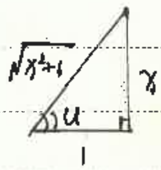
法一 三角换元 令 $x=a\tan u$，则 $dx=a\sec^2u\,du$



$$I=a^2\int\sec^3u\,du=a^2\left(\frac12\sec u\tan u+\frac12\ln|\sec u+\tan u|\right)+C$$
$$=\frac12x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

法二 分部 $I=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$
$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\left[\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]$$
$$=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$
$$\therefore I=\frac12x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

例5. $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$



法一 三角换元 令 $x=\tan u$，则 $dx=\sec^2u\,du$
$$I=\int\cos^2u\,du\xlongequal{降幂}\int\frac{1+\cos2u}{2}du=\frac12u+\frac14\sin2u+C$$
$$=\frac12\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C$$

分子拼凑，化繁

法二 $I=\int\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac12\int\frac{x}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)$
$$=\int\frac{dx}{1+x^2}+\frac12\int x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$=\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac12\int\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=\frac12\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C$$

例6. (1) $\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$ (2) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$

(1) $I=\int\frac{d(x+\sin x)}{x+\sin x}=\ln|x+\sin x|+C$

(2) $I=\int\frac{x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$
$$=\int x\,d(\tan\tfrac{x}{2})-\ln(1+\cos x)=x\tan\tfrac{x}{2}-\int\tan\tfrac{x}{2}dx-\ln(1+\cos x)$$
$$=x\tan x+2\ln|\cos\tfrac{x}{2}|-\ln(1+\cos x)+C.$$

例7. $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ $(a-b\neq n\pi+\frac{\pi}{2})$

化繁分子: $I=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos(a-b)}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\int \frac{\cos(x+a)\cos(x+b)+\sin(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\int[\cot(x+a)+\tan(x+b)]\,dx$$ 不乘 $\sin(a-b)$：无法平衡了裂开.

例8. $\int\frac{dx}{1+x^4}=\int\frac{dx}{(1+x^2)^2-2x^2}=\int\frac{dx}{(1+x^2-\sqrt{2}x)(1+x^2+\sqrt{2}x)}$

例9. $\int\frac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)}\ln(1+x^2)\,dx \overset{裂项}{=\!=} \int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{x}{1+x^2}\right)\ln(1+x^2)\,dx$ 根据分母裂项

$$=\int\frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx+\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\,d(\ln(1+x^2))$$

$$=-\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2(1+x^2)}dx+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)$$

$$=-\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)d(x^2)+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)$$

$$=-\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+C$$

例10. $\int\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2}\ln x\,dx \overset{以分母为准}{=\!=\!=} \int\frac{(x-1)^2+x}{x(x-1)^2}\ln x\,dx \overset{裂项}{=} \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)\ln x\,dx$

$$=\int\ln x\,d(\ln x)-\int\ln x\,d\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}\ln^2x-\frac{\ln x}{x-1}+\int\frac{1}{x(x-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2x-\frac{\ln x}{x-1}+\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\ln^2x-\frac{\ln x}{x-1}+\ln|x-1|-\ln x+C$$

例11. $\int\frac{\arctan e^x}{e^x}dx$

法一 分部 $\int\frac{\arctan e^x}{e^x}dx=-\int\arctan e^x\,d(e^{-x})=-\frac{\arctan e^x}{e^x}+\int\frac{e^x}{e^x(1+e^{2x})}dx$

$$=-\frac{\arctan e^x}{e^x}+\int\frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$$ 化简

$$=-\frac{\arctan e^x}{e^x}+x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$$

法二 换元 令 $\arctan e^x=u$，则 $x=\ln\tan u$，$dx=\frac{\sec^2u}{\tan u}du$

$$I=\int\frac{u}{\tan u}\cdot\frac{\sec^2u}{\tan u}du=\int u\csc^2u\,du=-\int u\,d(\cot u)=-u\cot u+\int\cot u\,du$$

$$=-u\cot u+\ln|\sin u|+C=-\frac{\arctan e^x}{e^x}+\ln\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}+C$$

例12. 设 $\frac{e^{-2x}}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3f'(x)\,dx$

$$f(x)=\left(\frac{e^{-2x}}{x}\right)'=\frac{-2xe^{-2x}-e^{-2x}}{x^2}$$

$$I=\int x^3\,df(x)=x^3f(x)-3\int x^2f(x)\,dx=x^3f(x)-3\int x^2\left(\frac{e^{-2x}}{x}\right)'dx=x^3f(x)-3\int x^2\,d\left(\frac{e^{-2x}}{x}\right)$$

$$=x^3f(x)-3xe^{-2x}+6\int e^{-2x}dx=-(2x^2+4x+3)e^{-2x}+C$$

例13. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+1}}dx \xrightarrow[\text{利用结构的一致性}]{\text{上下同除以}x^2} \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}} = \ln\left(x-\frac{1}{x}+\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}\right)+C$

利用 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.　　结构一致

例14. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

法一. 有理分式换元　令 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=u$. 则 $x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$. $dx=\frac{-4u}{(1+u^2)^2}du$

$I=\int \frac{1+u^2}{1-u^2}u\frac{-4u}{(1+u^2)^2}du = 2\int\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{1-u^2}\right)du = 2\arctan u-\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$

$= 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C$

法二. 三角换元. 令 $x=\cos u$. 则 $dx=-\sin u\,du$

$I=\int\frac{1}{\cos u}\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}(-\sin u)du \xrightarrow{\text{上下同乘}1+\cos u} -\int\frac{\sin u}{\cos u}\frac{\sin u}{1+\cos u}du = -\int\frac{1-\cos u}{\cos u}du$

$= u-\ln|\sec u+\tan u|+C = \arccos x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C$

例15. $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$

同时处理反三角、根号：令 $\arcsin x=u$　则 $x=\sin u$. $dx=\cos u\,du$

$I=\int u\cos^2u\,du \xrightarrow{\text{降幂}} \frac{1}{2}\int u(1+\cos 2u)du \overset{\text{分部}}{=} \frac{1}{4}u^2+\frac{1}{4}u\sin 2u+\frac{1}{8}\cos 2u+C$

$= \frac{1}{4}(\arcsin x)^2+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{1}{4}x^2+C$

例16. $\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

$(xe^x)'=(x+1)e^x$ 导数配套. 将另一部分凑入.

$I=-\int xe^x d\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{xe^x}{1+x}+\int e^x dx = \frac{e^x}{1+x}+C$

总结：(1) 凑微分（扩大积分类）　例：$\int e^u du=e^u+C \overset{u=\varphi(x)}{\Longrightarrow} \int e^{\varphi(x)}d\varphi(x) = \int e^{\varphi(x)}\varphi'(x)dx = e^{\varphi(x)}+C$

(2) 换元积分法（化简被积函数）例：$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \xrightarrow{x=a\tan u} \int\sec u\,du=\ln|\sec u+\tan u|+C$

$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

(3) 分部积分法. 可通过分部积分对幂函数降阶

幂函数与指数函数乘积　$\int xe^{-x}dx$

幂函数与三角函数乘积　$\int x^2\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int x^2 d\cos(2x) = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\int x\cos 2x\,dx$

2° 通过分部积分可改变函数类

幂函数与对数函数乘积：$\int x^4 \ln x\,dx = \frac{1}{5}\int \ln x\,d(x^5) = \frac{1}{5}x^5\ln x - \frac{1}{5}\int x^5 \frac{1}{x}dx$ 将对数函数化为幂函数

幂函数与反三角函数乘积：$\int x^2 \arctan x\,dx = \frac{1}{3}\int \arctan x\,d(x^3) = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int x^3\frac{dx}{1+x^2}$ 将反三角函数变为有理分式函数

10. 特殊函数的不定积分

(1) 有理分式函数：设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式，且没有共同的零点（不可约分），则其商 $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 称为有理分式函数。若 $n<m$，则称 $R(x)$ 为有理真分式；若 $n\ge m$，则称 $R(x)$ 为有理假分式。

任何有理假分式，均可化为一个多项式与一个有理真分式的和，即当 $n\ge m$ 时，$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_1(x)+\frac{P_l(x)}{Q_m(x)}$，其中 $R_1(x)$ 是多项式，$\frac{P_l(x)}{Q_m(x)}$ 为有理真分式。因此，有理分式的不定积分可化为有理真分式的不定积分。

代数学基本公式（Guass公式）：$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_k\in\mathbb{R},\ a_n\ne 0)$

$= a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ $(\alpha_k\in\mathbb{C})$.

$f(x)=0$ 虚根成对出现

证明：$f(\alpha)=a_n\alpha^n+\cdots+a_0=0$

$\overline{f(\alpha)}=\overline{a_n\alpha^n+\cdots+a_0}=a_n(\bar\alpha)^n+\cdots+a_1\bar\alpha_1+a_0$

$=f(\bar\alpha)=0$ ∴ $\bar\alpha$ 也为 $f(x)=0$ 根

∴ $(x-\alpha)(x-\bar\alpha)=x^2-(\alpha+\bar\alpha)x+\alpha\bar\alpha \triangleq x^2+px+q$ $(p,q\in\mathbb{R},\ p^2-4q<0)$

∴ $f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{p_1}\cdots(x-\alpha_s)^{p_s}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{t_l}$ （p_1 根重数）$(\alpha_i\in\mathbb{R})$

$(p_1+\cdots+p_s+2(t_1+\cdots+t_l)=n)$.

例 $\frac{\sin x}{x}=\cdots(x-\pi)(x+\pi)(x+2\pi)\cdots(x+k\pi)\cdots$

∴ $\sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}(x^2-k^2\pi^2)$.

有理真分式化部分分式：定理：设 $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 为有理真分式，$Q_m(x)$ 的因式分解形式为

$Q_m(x)=q_0(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_t)^{k_t}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}$

应用难点：难求根

其中 a_0, a_i $(i=1,2,\cdots,t)$, p_j, q_j $(j=1,2,\cdots,s)$ 均为常数 $(t, s\in N)$,

且 $p_j^2-4q_j<0$, $(j=1,2,\cdots,s)$, $k_1+\cdots+k_t+2(l_1+\cdots+l_s)=m$.

则有理真分式 $R(x)$ 可表示为

$$\left[\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right]+\cdots+\left[\frac{A_{t1}}{x-a_t}+\frac{A_{t2}}{(x-a_t)^2}+\cdots+\frac{A_{tk_t}}{(x-a_t)^{k_t}}\right]$$
$$+\left[\frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_{12}x+D_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{C_{1l_1}x+D_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}\right]+\cdots$$
$$+\left[\frac{C_{s1}x+D_{s1}}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{C_{s2}x+D_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\cdots+\frac{C_{sl_s}x+D_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}\right]$$

其中 A_{ij} $(i=1,2,\cdots,t,\ j=1,2,\cdots,k_i)$; C_{ij}, D_{ij} $(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,l_i)$

都是由 $R(x)$ 唯一确定的实数.

对于最后一种类型的有理分式积分, 要通过配方化为如下形式:

$$\int\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^n}dx = C\int\frac{x+\frac{p}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx+\left(D-\frac{Cp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

用于凑微分

$$= C\int\frac{x+\frac{p}{2}}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}dx+\left(D-\frac{Cp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}$$

记 $u=x+\frac{p}{2}$, $a^2=\frac{4q-p^2}{4}>0$ 则

$$\int\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^n}dx = C\int\frac{u}{(u^2+a^2)^n}du+\left(D-\frac{Cp}{2}\right)\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}$$

$\therefore$ 有理分式函数积分可化为求解以下四类函数的积分

(1) $\int\frac{dx}{x-a}$ (2) $\int\frac{dx}{(x-a)^n}$ (3) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ (4) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n\geq 2)$

$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(a\neq 0,\ n\geq 1)$.

分母化解

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x}{(x^2+a^2)^n}d(x^2+a^2)=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)a^2}\int x\,d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-I_{n-1}\right)+\frac{1}{a^2}I_{n-1}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}\ (n=2,3,\cdots)$$

而 $I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.

例1. $\int \frac{x^2-10}{(x+1)(x-2)^2}dx$

设 $\frac{x^2-10}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$. A.B.C为待定常数

法一 通分.对应系数相等 $x^2-10=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2-10=(A+B)x^2+(-4A-B+C)x+4A-2B+C$

$\therefore A=-1,\ B=2,\ C=-2$

法二 赋值法. 令$x=2$. $3C=-6 \Leftrightarrow C=-2$. 令$x=0$ $4A-2B+C=-10 \Leftrightarrow B=2$

令$x=-1$ $9A=-9 \Leftrightarrow A=-1$

$\therefore I=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx=-\ln|x+1|+2\ln|x-2|+\frac{2}{x-2}+C$

例2. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$

法一 部分分式: 令 $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ 则$(A+B)x^2+Cx+A=1$

$\therefore A=1,\ B=-1,\ C=0$

$\therefore I=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

法二 三角换元 令$x=\tan u$ 则$dx=\sec^2u\,du$

$I=\int\frac{\sec^2u\,du}{\tan u\sec u}=\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\ln|\sin u|+C=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$

变式: $\int\frac{dx}{x(x^5+1)}$ 五次方程难分解.

法一 上下同乘 $I=\int\frac{x^4dx}{x^5(x^5+1)}=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5)}{x^5(x^5+1)}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right|+C$

法二 倒变换 令$x=\frac{1}{u}$. 则$dx=-\frac{1}{u^2}du$

$I=-\int\frac{u^4du}{1+u^5}=-\frac{1}{5}\int\frac{d(u^5+1)}{u^5+1}=-\frac{1}{5}\ln|u^5+1|+C=-\ln\left|\frac{x^5+1}{x^5}\right|+C$

(2) 二次三项式: 拆为 凑分母 + 常数 (配方)

例1. $\int\frac{2x-1}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{(2x+2)-3}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}dx-3\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}$

$=\ln(x^2+2x+5)-\frac{3}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$

例2. $\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}dx-3\int\frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2+3}$

转后页

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

变式：$\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{3}{2}\int\frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})+C.$$

(3) 三角有理分式：设 $P(u,v)$ 为关于 u,v 的二元有理分式函数，称 $P(\cos x,\sin x)$ 为三角有理分式函数。$\int P(\sin x,\cos x)dx$.

记 $t=\tan\frac{x}{2}$ $(|x|<\pi)$ 则 $x=2\arctan t$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

而 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$（万能代换公式）

$\therefore\int P(\sin x,\cos x)dx=\int P(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$ 转化为有理分式.

例1. $\int\frac{dx}{2+\cos x}$

法一：万能代换 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan t$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I=\int\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+C$$

法二：上下同乘 $2-\cos x$. $I=\int\frac{(2-\cos x)dx}{4-\cos^2x}=\int\frac{2}{4-\cos^2x}dx-\int\frac{\cos x}{4-\cos^2x}dx$

$\xlongequal{\text{上下同除}\cos^2x}\int\frac{2\sec^2x}{4\sec^2x-1}dx-\int\frac{d\sin x}{3+\sin^2x}=\int\frac{d(2\tan x)}{3+4\tan^2x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x)+C$$

例2. $\int\frac{dx}{2\cos x-\sin x}$

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan t$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$I=-\int\frac{dt}{t^2+t-1}=-\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2t+1+\sqrt{5}}{2t+1-\sqrt{5}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{5}}{2\tan\frac{x}{2}+1-\sqrt{5}}+C$$

例3. $\int\frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2x}dx$　　期望凑 $d(\tan x)$：上下同乘 $\sec^2x$

$$I=\int\frac{\tan x\sec^2x\,dx}{(\tan^2x+1)(1+\tan x+\tan^2x)}\xlongequal{\tan x=u}\int\frac{u}{(u^2+1)(u^2+u+1)}du=\int(\frac{1}{u^2+1}-\frac{1}{u^2+u+1})du$$

$$=\arctan u-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=x-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}}+C$$

11. 杂题. 例1. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$

三角换元 令 $x=\tan u$, 则 $dx=\sec^2 u\,du$

$$I=\int \ln\tan u\cos u\,du \overset{分部}{=} \int \ln\tan u\,d(\sin u) = \sin u\ln\tan u - \int \sin u\frac{\sec^2 u}{\tan u}du$$

$$=\sin u\ln\tan u - \int \sec u\,du = \sin u\ln\tan u - \ln|\sec u+\tan u|+C$$

$$=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$$

例2. $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$ $\quad$ $(1-\ln x$ 与 $(\frac{\ln x}{x})'$ 相似结构: 构造 $\frac{1-\ln x}{x^2}$ 凑入

$$=\int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}dx = -\int \frac{1}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}d(1-\frac{\ln x}{x}) = \frac{x}{x-\ln x}+C$$

例3. (1) $\int \frac{dx}{1+x^4}$ $\quad$ (2) $\int \frac{x^2}{1+x^4}dx$

背景: $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} \overset{x=\frac{1}{u}}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}(-\frac{1}{u^2})du = \int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

变换: ①基于被积项 ②基于积分限

记 $I_1=\int\frac{dx}{1+x^4}$, $I_2=\int\frac{x^2}{1+x^4}dx$ 则

$$I_1+I_2=\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt2 x}+C$$

结构数

$$I_1-I_2=\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx=-\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=-\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+\sqrt2}{x+\frac{1}{x}-\sqrt2}\right|+C$$

$$\therefore \int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{4\sqrt2}\left(2\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt2 x}+\ln\left|\frac{x^2+\sqrt2 x+1}{x^2-\sqrt2 x+1}\right|\right)+C$$

$$\int\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{4\sqrt2}\left(2\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt2 x}-\ln\left|\frac{x^2+\sqrt2 x+1}{x^2-\sqrt2 x+1}\right|\right)+C$$

例4. (1) $\int\frac{dx}{1+x^3}$ $\quad$ (2) $\int\frac{x}{1+x^3}dx$

记 $I_1=\int\frac{dx}{1+x^3}$, $I_2=\int\frac{x}{1+x^3}dx$ 则

$$I_1+I_2=\int\frac{1+x}{1+x^3}dx=\int\frac{dx}{x^2-x+1}=2\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2+3}=\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}+C$$

$$I_1-I_2=\int\frac{1-x}{1+x^3}dx=\underbrace{\int\frac{1-x+x^2}{1+x^3}dx}_{因式}+\underbrace{\int\frac{x^2}{1+x^3}dx}_{凑微}=\ln|1+x|-\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$$

$$\therefore I_1=\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^3+1|+C$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^3+1|+C$$

变式: $\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

例5. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$.

法一. 令 $x=\cos u$. 则 $dx=-\sin u\,du$

$$I=-\int\sec^4u\,du=-\int\sec^2u\,d(\tan u)=-\int(\tan^2u+1)d(\tan u)$$
$$=-\frac{\tan^3u}{3}-\tan u+C=-\frac{1}{3}\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

法二. 令 $x=\frac{1}{u}$. 则 $dx=-\frac{1}{u^2}du$

$$I=-\int\frac{u^3}{\sqrt{u^2-1}}du=-\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{u^2-1}+\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\right)d(u^2-1)=-\frac{1}{3}(u^2-1)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{u^2-1}+C$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

例6. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2(y-x)=x^2$ 所确定的隐函数. 计算 $\int\frac{dx}{y^2}$.

隐函数确定积分: 参数变换. 令 $y=tx$ 则 $x=\frac{1}{t^2(t-1)}$ $y=\frac{1}{t(t-1)}$ $dx=\frac{3t-2}{t^3(t-1)^2}dt$

$$\int\frac{dx}{y^2}=\int t^2(t-1)^2\frac{3t-2}{t^3(t-1)^2}dt=\int\frac{3t-2}{t}dt=3t-2\ln|t|+C$$
$$=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C$$

例7. $\int\frac{4e^x-3\cdot2^x}{e^x+2^x}dx$.

令 $4e^x-3\cdot2^x=\overset{补足}{a(e^x+2^x)}+\overset{凑微}{b(e^x+2^x)'}$ (线性无关)

$$\begin{cases}a+b=4\\a+b\ln2=-3\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{3+4\ln2}{1-\ln2},\ b=\frac{7}{1-\ln2}$$

$$I=\int\frac{a(e^x+2^x)+b(e^x+2^x)'}{e^x+2^x}dx=ax+b\ln(e^x+2^x)+C$$
$$=\frac{1}{1-\ln2}\left(-(3+4\ln2)e^x+7\ln(e^x+2^x)\right)+C$$

例8. $\int\frac{x^4}{(x^2+1)^2}dx$

法一. 凑微分 $I=\frac{1}{2}\int\frac{x^3}{(x^2+1)^2}d(1+x^2)=-\frac{1}{2}\int x^3d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\xlongequal{分部}-\frac{1}{2}\frac{x^3}{(x^2+1)}+\frac{3}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$

法二. 三角换元. 令 $x=\tan u$. 则 $dx=\sec^2u\,du$

$$I=\int\tan^4u\cos^2u\,du=\int\sin^2u(\sec^2u-1)du=\int\sin^2u\,d(\tan u)-\int\sin^2u\,du$$

$= \sin^2 u\tan u - 3\int \sin^2 u\,du = \sin^2 u\tan u - \frac{3}{2}u + \frac{3}{2}\sin u\cos u + C$

$= \frac{x^3}{x^2+1} + \frac{3x}{2(x^2+1)} - \frac{3}{2}\arctan x + C$

例9. 在区间I内有第一类间断点的函数f不可能存在原函数.

假设$f(x)$在$x_0\in I$处间断,且为第一类间断,若$f(x)$存在原函数$F(x)$,则对$\forall x\in I$,

均有$F'(x) = f(x)$,

特别地 $F'(x_0) = f(x_0)$,

$F'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \xlongequal{\exists \xi\in(x,x_0)} \lim\limits_{x\to x_0-0}F'(\xi) = \lim\limits_{x\to x_0-0}f(\xi) = f(x_0-0)$

同理 $F'_+(x_0) = f(x_0+0)$

(1) 若$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$,则$F'_-(x_0)\neq F'_+(x_0)$ 与$F(x)$在x_0处可导矛盾.

(2) 若x_0为f的可去间断点,则$f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$ ∴ $F'(x_0)\neq f(x_0)$ 矛盾.

∴ 有第一类间断点的函数不存在原函数

例10. $\int \frac{1+e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \int\frac{dx}{1+x^2} + \int\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \arctan x + e^{\arctan x} + C$

例11. $\int \frac{dx}{x(1+x^{10})}$

法一. 上下同乘x^9. $I = \int\frac{x^9dx}{x^{10}(1+x^{10})} = \frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{1+x^{10}}\right)d(x^{10})$

$= \frac{1}{10}\left(10\ln|x| - \ln(1+x^{10})\right) + C$

法二. 令$x = \frac{1}{u}$,则$dx = -\frac{1}{u^2}du$

$I = \int\frac{dx}{x(1+x^{10})} = -\int\frac{u^9}{1+u^{10}}du = -\frac{1}{10}\ln(1+u^{10}) + C = \frac{1}{10}(10\ln|x| - \ln(1+x^{10})) + C$

例12. $\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

令$x = \tan u$,则$dx = \sec^2 u\,du$.

$I = \int\frac{\sec^2 u}{(2\tan^2 u+1)\sec u}du = \int\frac{\cos u\,du}{1+\sin^2 u} = \arctan(\sin u) + C = \arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

例13. $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$.

令$x = 3\sec u$,则$dx = 3\sec u\tan u\,du$

$I=3\int\tan^2u\,du=3\int(\sec^2u-1)du=3(\tan u-u)+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C$

例14. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$

法一. 令 $x=\tan u$ 则 $dx=\sec^2u\,du$

$I=\int\frac{\sec u}{\tan^2u}du=\int\csc u\cot u\,du=-\csc u+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

法二. 令 $x=\frac{1}{u}$ 则 $dx=-\frac{1}{u^2}du$

$I=-\int\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}du=-\sqrt{1+u^2}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

例15. $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

令 $\sqrt{e^x-1}=u$, 则 $x=\ln(1+u^2)$ $dx=\frac{2u}{1+u^2}du$

$I=\int\frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\frac{2u}{1+u^2}=2\int\ln(1+u^2)du$

$\overset{\text{分部}}{=}2u\ln(1+u^2)-4\int\frac{u^2}{1+u^2}du=2u\ln(1+u^2)-4(u-\arctan u)+C$

$=(2x-4)\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$

例16. $\int x^2\arcsin x\,dx=\frac{1}{3}\int\arcsin\,d(x^3)=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

令 $x=\sin u$. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin^3u\cos u}{\cos u}du=-\int(1-\cos^2u)d(\cos u)$

$=\frac{1}{3}\cos^3u-\cos u+C=\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x^2}+C$

$\therefore I=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+C$

例17. $\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx=2\int\frac{e^{-\sin x}\sin x}{(1-\sin x)^2}d(\sin x)=2\int\sin x\,e^{-\sin x}d\left(\frac{1}{1-\sin x}\right)$

$=\frac{2\sin x\,e^{-\sin x}}{1-\sin x}-2\int e^{-\sin x}d(\sin x)=\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$

例18. $\int\sec^n x\,dx$ $(n\in N^*)$

(1) $I_0=x+C$, $I_1=\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

(2) 当 $n\geq2$ 时 $I_n=\int\sec^n x\,dx=\int\sec^{n-2}x\,d(\tan x)=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\int\tan^2x\sec^{n-2}x\,dx$

$=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\int(\sec^2x-1)\sec^{n-2}x\,dx$

$= \sec^{n-2}x\tan x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$

$\therefore I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

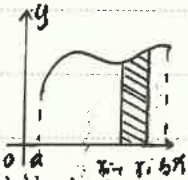
$\therefore I_3 = \int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

$I_4 = \frac{1}{3}\sec^2 x\tan x + \frac{2}{3}\tan x + C = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$

§1 定积分的概念 — §3 微积分基本定理

1. 定积分的引入:

(1) 曲边梯形的面积: 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)\geq 0$, 称由直线 $x=a$, $x=b$, $y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 所围成的平面区域 D 为曲边梯形.



分割: 在 $[a,b]$ 内插入 $(n-1)$ 个分点, $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 每个小区间的长度分别为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 这样将曲边梯形 D 也分割成 n 个小曲边梯形. 记每个小曲边梯形为 ΔS_i, 其面积也为 ΔS_i $(i=1,2,\cdots,n)$. 称 $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$ 为分割 $T:\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$ 的模或范数, 记为 $\lambda=\|T\|$.

取点: $\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 以 $f(\xi_i)$ 为高, Δx_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 为底的矩形面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i$. 用该矩形面积近似小曲边梯形的面积, 即 $\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

作和: 将每个小矩形面积相加, 得到曲边梯形面积近似值 $S\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

求极限: 随着分割越来越细, 即分割的模趋向于零时, 上述和式的极限定义为曲边梯形的面积, 即

$S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ (不一定为等分, $n\to\infty$ 时 λ 不一定趋向 0). 黎曼和

由定积分定义, 有 $S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$.

(2) 变速直线运动的路程: 某质点 m 沿直线做变速运动, 且速度 $v=v(t)$, 求该质点从时刻 T_0 到时刻 T_1 $(T_0<T_1)$ 所经过的路程.

分割: 在 $[T_0,T_1]$ 内插入 $(n-1)$ 个分点,

取点: $\forall \xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\Delta s_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

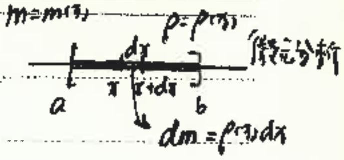
作和: $s\approx\sum\limits_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$

求极限: $s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$

由定积分定义: 有 $s=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum\limits_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i=\int_{T_0}^{T_1}v(t)dx$

(3) 变密度直线段构件的质量: 某截面面积相等的直线段构件, 其线密度为 $\rho=\rho(x)$ $(a\leq x\leq b)$, 求该物体的

质量(截面面积相等的物体的线密度为物体单位长度的质量)



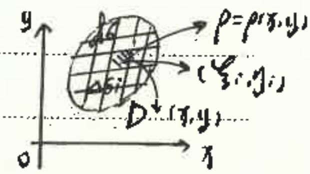
分割:在$[a,b]$内插入$(n-1)$分点,

取点:$\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\Delta m_i\approx\rho(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

作和:$m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\Delta x_i\doteq\int_a^b\rho(x)dx$

推广:①直线段构件 $\underset{\text{目标微分}}{dm}=\rho(x)dx\Rightarrow m=\int_a^b dm=\int_a^b\rho(x)dx$

②薄片质量 $m=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D\rho(x,y)d\sigma$

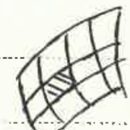


③

$m=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)dV$

④

$m=\int_{\widehat{AB}}\rho(x,y,z)ds$ ⑤



$m=\iint_\Sigma\rho(x,y,z)dS$

例:转动惯量:$J_z=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV$ (有限区间+有界函数)

2.定积分的定义:设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数(可积必有界),在$[a,b]$内插入$(n-1)$个分点,

T: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,将区间$[a,b]$分成$n$个小区间$[x_{i-1},x_i]$,其长度分别

为Δx_i $(i=1,2,\cdots,n)$,记$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$,称之为分割$T$的模 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,

作和 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$. (与分割,取点无关)

如果∃常数J,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$0<\|T\|<\delta$时,$\forall$分割T有$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$,

则称$f(x)$在$[a,b]$上可积,常数J称为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分,记作$J=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

由上述方法所得的和式$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$称为Riemann和. (不同于一般极限(数列或函数),确定与否)

因此,定积分$\int_a^b f(x)dx$也称为黎曼积分(R-积分),Riemann和 $\sigma(f,T,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

由定积分定义可得 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ ($\int_a^b f$:与自变量无关),曲边梯形面积可表示为$S=\int_a^b f(x)dx$.

3.定积分的几何意义:根据定积分的定义,当$f(x)\ge0$时,$\int_a^b f(x)dx$的值表示由直线$x=a$,$x=b$,$y=0$

与曲线$y=f(x)$所围成的平面区域D(曲边梯形)的面积;当$f(x)<0$时,是该曲边梯形面积

的负值，因此，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示由直线 $x=a, x=b, y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 所围成的平面区域 D（曲边梯形）的面积的代数和.

根据定积分的定义与几何意义，不难得到

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$ (2) $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

(3) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^2\ (a>0)$（$r=a$ 的四分之一圆面积）

4. 可积函数类：根据定积分的定义来判断函数是否可积是比较困难的，下面给出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分条件.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（可数个）

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且 f 在 $[a,b]$ 上最多只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（⇒有界）

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

例：证明：Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1 & (x\in\mathbb{Q})\\ 0 & (x\notin\mathbb{Q})\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

由于有理数与无理数在实数轴上均稠密，即在实数 x 的任一邻域内均有有理数与无理数

将区间 $[0,1]$ 分割成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$

$\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，则

当所有 $\xi_i\in\mathbb{Q}$ 时，$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n D(\xi_i)\Delta x_i=1$.

当所有 $\xi_i\notin\mathbb{Q}$ 时，$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n D(\xi_i)\Delta x_i=0$

$\therefore$ Riemann 和极限不存在，从而 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 不可积.

例. 根据定积分的定义计算定积分 $\int_0^1 e^x dx$.

因为 $f(x)=e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，从而在 $[0,1]$ 上可积，其定积分 $\int_0^1 e^x dx$ 为黎曼和的极限，且与分割、取点无关.

将 $[0,1]$ 分割成 n 等分，其分点为 $x_k=\frac{k}{n}\ (k=1,2,\cdots,n)$.

在区间 $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ 上取 $\xi_k=\frac{k}{n}$，则 $S=\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

$\int_0^1 e^x dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}}-1}=e-1$（$n\to+\infty$ 时，$e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}$）.

例2. 将 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ 表示为定积分.

①写作 $\sum$：$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$

②提 n：$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+(\frac{k}{n})^2}$ $\underline{\underline{\text{匹配}}}$ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2}$

1° $\frac{k}{n}\in[0,1]$. $\Delta x_k=\frac{1}{n}$. $x_k=\frac{k}{n}$ 分划

2° $\xi_k=x_k=\frac{k}{n}$ 取点，$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

$\therefore I=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

变式：计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2+n}\right)$

记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2+k}$ 则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2+k^2}-\frac{k}{n^2+k^2+k}\right)\le S_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$ 转化

而 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2+k^2}-\frac{k}{n^2+k^2+k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(n^2+k^2)(n^2+k^2+k)}<\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2\to 0$ 误差估计

四阶　三阶

$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}-\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2<T_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$ 夹逼.

而 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln 2$　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2=0$.

$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2+k}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln 2$

例3. 根据定积分定义计算定积分 $\int_0^1 x^2dx$.

由于 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，从而在 $[0,1]$ 上可积. 其定积分 $\int_0^1 x^2dx$ 为黎曼和的极限且与分割、取点无关

将 $[0,1]$ 分割成 n 等分，其分点为 $x_k=\frac{k}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$

在 $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ 上 取 $\xi_k=\frac{k}{n}$. 则 $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k^2}{n^2}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$

5. 牛顿-莱布尼茨公式：(Newton-Leibniz) 公式 - 微积分学基本公式

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\exists$ 原函数 $F(x)$. 则 f 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

证明：只需证 $\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta>0.$ 当 $\|T\|<\delta$ 时. 有 $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-[F(b)-F(a)]\right|<\varepsilon$. 导数·差 $\Rightarrow$ Lagrange

对 $[a,b]$ 的任一个分割 T：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$

$=f(\eta_i)\Delta x_i$

上对F应用Lagrange中值定理，$\exists\,\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$ s.t. $F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})$

$\therefore F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i$

又f在$[a,b]$连续，从而一致连续，∴对上述$\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当$x',x''\in[a,b]$且$|x'-x''|<\delta$时，

有$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

又当$\|T\|<\delta$时，$\forall\,\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$有$|\xi_i-\eta_i|<\delta$.

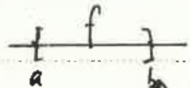
$$\therefore \left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-(F(b)-F(a))\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)-f(\eta_i))\Delta x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon$$

∴f在$[a,b]$可积且$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

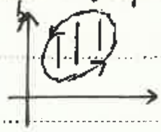
推广：由边界+函数确定积分

① N-L公式：$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$



$\int_a^b f$

② Green公式 $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\oint_C Pdx+Qdy$



说明：① 揭示积分与微分之间的内在联系

② 将连续函数定积分转化为计算原函数端点函数值的差

例. (1) $\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1$

(2) $\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-2x+2}dx=\int_0^1\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\int_0^1\frac{5}{x^2-2x+2}dx$

$=\int_0^1\frac{d(x^2-2x+2)}{x^2-2x+2}+5\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+1}dx$

$=\ln(x^2-2x+2)\Big|_0^1+5\arctan(x-1)\Big|_0^1=-\ln2+\frac{5}{4}\pi$

(3) $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int_0^1\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=(\arcsin x+\sqrt{1-x^2})\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1$

例. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k}{n}\pi}{n+\frac{1}{k}}$ 影响小，去掉后易转化 → 考虑 $T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi$ (转化)

函数$g(x)=\sin\pi x$在$[0,1]$可积，将$[0,1]$等分为n个小区间，取右端点，$T=\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\}$.

$\Delta x_k=\frac{1}{n}$，取分点 $\xi_k=\frac{k}{n}$，则 T_n 为 $g(x)$ 在此分割与取点下的积分和。

积分限由被积函数选择决定

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} T_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=-\left(\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$

$\because \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi\le S_n\le\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi$

夹逼

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\underline{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{2}{\pi}$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$

例2. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3+n}\right)$

记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3+k}$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^3+k^3}-\frac{k^2}{n^3+k^3+n}\right)\le S_n\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\ln 2$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3+n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^3+k^3}-\frac{k^2}{n^3+k^3+n}\right)$

而 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^3+k^3}-\frac{k^2}{n^3+k^3+n}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{nk^2}{(n^3+k^3)(n^3+k^3+n)}\le\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{n^6}\longrightarrow 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\ln 2$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{3}\ln 2$

6. 定积分性质：(1) 线性性，设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$，$k\in\mathbb{R}$ 为常数

② $\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

推广：V 为线性空间，$\forall\alpha,\beta\in V$，$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$，

$f,g\in L[a,b]$（$[a,b]$ 上的可积函数）　　$(f,f)=0 \Leftrightarrow f(x)\equiv 0$.

1° $f+g\in L$，$kf\in L$　　2° $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$　　$(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx\ge 0$.

$|(f,g)|\le\|f\|\|g\|$　柯西不等式：$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

(2) 有限可加性：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\forall c\in[a,b]$，有

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$（定积分可分段求积，此公式常用于分段函数的定积分计算）

(3) 非负性：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\geq 0$，则 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

推论1：若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(x)\geq g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$

推论2：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$

(4) 估值不等式：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且对 $\forall x\in[a,b]$，有 $m\leq f(x)\leq M$ (m,M 为常数)，则

$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

例. 设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上非负的连续函数，如果 $\int_a^b f(x)dx=0$，证明：$\forall x\in[a,b]$，$f(x)=0$.

证明：反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒等于零，则 $\exists x_0\in(a,b)$ s.t. $f(x_0)>0$.

由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续，根据函数极限的保号性，$\exists\delta_0>0$，当 $x\in U(x_0,\delta_0)$ 时，

均有 $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$，且 δ_0 满足 $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subseteq[a,b]$

$\therefore\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta_0}f(x)dx+\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0}f(x)dx+\int_{x_0+\delta_0}^b f(x)dx$

$\geq\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0}f(x)dx>\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0}\frac{f(x_0)}{2}dx=f(x_0)\delta_0>0$. 矛盾

$\therefore\forall x\in[a,b]$，$f(x)=0$.

例1. (1) $\int_{-2}^2\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-2}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$

(2) $\int_0^1(x+x^2e^{x^3})dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}e^{x^3}\right)\Big|_0^1=\frac{2e+1}{6}$

例2. $\int_1^4\max\{2x+3,x^2\}=\int_1^3(2x+3)dx+\int_3^4x^2dx=(x^2+3x)\Big|_1^3+\frac{x^3}{3}\Big|_3^4=14+\frac{37}{3}=\frac{79}{3}$.

例3. $\int_0^\pi\sqrt{1-\sin2x}\,dx=\int_0^\pi\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx=\int_0^\pi|\cos x-\sin x|$ 定积分讨论符号

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^\pi(\sin x-\cos x)dx$

$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^\pi=2\sqrt{2}$

例4. 证明 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx=0$.

$\because 0\leq\frac{x^n}{x+1}\leq x^n$ $\therefore 0\leq\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx\leq\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$

又 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ $\therefore\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx=0$

推广：设 f 在 $[0,1]$ 连续，证明 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1x^nf(x)dx=0$.

证明：$\because f$在$[0,1]$连续，$\therefore |f|$在$[0,1]$连续，记$|f|$在$[0,1]$上最大值为M.

则 $0\le x^n|f(x)|\le Mx^n$

$0\le \left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \le \int_0^1 |x^n f(x)|dx \le M\int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{n+1}=0$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.

例5. 设f在$[0,1]$上连续，且$\forall x\in[0,1]$有$0<m\le f(x)\le M$，证明$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\le\frac{(M+m)^2}{4Mm}$

$\because \frac{(f-m)(M-f)}{f}\ge 0$ $\therefore f+\frac{Mm}{f}\le M+m$

$M+m\ge \int_0^1 f(x)dx+Mm\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\ge 2\sqrt{\int_0^1 f(x)dx\cdot Mm\int_0^1\frac{dx}{f(x)}}$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\le\frac{(M+m)^2}{4Mm}$

例6. 设f在$[0,1]$上连续，计算$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx$.

误差估计 $\left|\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx-f(1)\right|=\left|\int_0^1[f(\sqrt[n]{x})-f(1)]dx\right|\le\int_0^1|f(\sqrt[n]{x})-f(1)|dx$

$\overset{\text{二分}}{=}\int_0^{\frac{1}{n}}|f(\sqrt[n]{x})-f(1)|dx+\int_{\frac{1}{n}}^1|f(\sqrt[n]{x})-f(1)|dx$

$\because f$在$[0,1]$连续 $\therefore \exists M>0$. $\forall x\in[0,1]$. $|f(x)|\le M$.

$\therefore \int_0^{\frac{1}{n}}|f(\sqrt[n]{x})-f(1)|dx\le\frac{2M}{n}$

当$\frac{1}{n}\le x\le 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}f(\sqrt[n]{x})=f(1)$ 部分$\to$整体

$\forall\varepsilon>0$. $\exists N_0>0$. $\forall n>N_0$. $|f(\sqrt[n]{x})-f(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore\forall\varepsilon>0$. $\exists N=\max\{N_0,[\frac{4M}{\varepsilon}]\}$. $\forall n>N$.

$\left|\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx-f(1)\right|\le\int_0^{\frac{1}{n}}|f(\sqrt[n]{x})-f(1)|dx+\int_{\frac{1}{n}}^1|f(\sqrt[n]{x})-f(1)|dx<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx=f(1)$.

7. 定积分中值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

法一. 设$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\mu$. 若$\forall x\in(a,b)$. $f(x)\ne\mu$

$\because f(x)$在$[a,b]$上连续 $\therefore f(x)-\mu$在$[a,b]$上保号. 不妨设$f(x)>\mu$.

则$\int_a^b f(x)dx>(b-a)\mu$. 从而$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx>\mu$. 矛盾

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$ s.t. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

注: $\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值

法二: $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $\exists$ 最大值 M 和最小值 m.

即 $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ s.t. $M = f(x_1)$, $m = f(x_2)$. 不妨设 $x_1 < x_2$.

若 $f(x)$ 为常数, 显然; 若 $f(x)$ 不为常数, 则 $m < M$ 从而 $x_1 < x_2$.

又 $\int_a^b [M - f(x)]dx > 0$, $\int_a^b [f(x) - m]dx > 0$

$\therefore m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

$\Leftrightarrow m < \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} < M$

根据连续函数的介值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a,b)$ s.t. $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$ s.t. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

例. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 连续, 在 $(0,3)$ 可导, 且 $f(0) + f(2) = 2\int_2^3 f(x)dx$ 证明: $\exists \xi \in (0,3)$ s.t. $f'(\xi) = 0$.

由连续函数介值定理知, $\exists x_1 \in [0,2]$ s.t. $f(x_1) = \frac{f(0)+f(2)}{2}$

由定积分中值定理知, $\exists x_2 \in (2,3)$ s.t. $\int_2^3 f(x)dx = f(x_2)$

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$ 又 f 在 $[x_1, x_2]$ 可导 由 Rolle 定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (0,3)$ s.t. $f'(\xi) = 0$

注: (1) 若不加强定积分中值定理, 则无法保证 x_1, x_2 互异

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 连续, $\forall \alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\forall x_i \in [a,b]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

$\exists \xi \in [a,b]$ s.t. $f(\xi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$ (加权平均值)

推广定积分中值定理: 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号 则 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t.

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

证明: 不妨设 $\forall x \in [a,b]$, $g(x) \geq 0$.

设 f 在 $[a,b]$ 上最小值, 最大值分别为 m, M. 即 $m \leq f(x) \leq M$ 从而

$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ $\therefore m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$

若$\int_a^b g(x)dx=0$. 又$g(x)$在$[a,b]$连续且非负 $\therefore g(x)\equiv 0$. $\therefore \forall\xi\in(a,b)$成立

法一: 若$\int_a^b g(x)dx>0$. 则$m\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$. 由连续函数介值定理知.

$\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ (需讨论$\xi=a/b$)

法二: 若$\forall\xi\in(a,b)$均有$\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\ne f(\xi)$. 记$\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\mu$.

$\therefore\forall x\in(a,b)$ $f(x)>\mu$或$f(x)<\mu$

不妨设$\forall x\in(a,b)$, $f(x)>\mu$. 且$g(x)\ge 0$ $g(x)\not\equiv 0$. 则$f(x)g(x)\ge\mu g(x)$.

$\therefore\int_a^b f(x)g(x)dx>\mu\int_a^b g(x)dx$ 矛盾

$\therefore\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

8. 变上限函数的导数: 设$f(x)$在$[a,b]$上连续 则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导 且$F'(x)=f(x)$.

证明: 对$\forall x\in[a,b]$ 取增量Δx使$x+\Delta x\in[a,b]$, 则

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt+\int_x^a f(t)dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\theta\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=f(x)\quad(0<\theta<1)$$ (用$f(\xi)$,ξ依Δx而趋变)

$\therefore F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$可导 且$F'(x)=f(x)$

$\therefore F(x)$为$f(x)$的一个原函数. 即连续函数一定有原函数.

如果f在$[a,b]$上可积 则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$连续.

另解: 要证$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)$. 只需证$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt-f(x)\Delta x}{\Delta x}\right|<\varepsilon$

统一形式: 法一. 积分中值定理: $\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=f(x+\theta\Delta x)\Delta x$.

法二. 将Δx化为积分 $f(x)\Delta x=f(x)\int_x^{x+\Delta x}dt=\int_x^{x+\Delta x}f(x)dt$

$\therefore (*)=\dfrac{1}{|\Delta x|}\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|dt\right|\le\dfrac{1}{|\Delta x|}\left|\int_x^{x+\Delta x}\varepsilon dt\right|=\varepsilon$

t介于x, $x+\Delta x$之间

($\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$. 当 $0<|\Delta x|<\delta$ 时 $|f(x+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon$ 连续)

$\therefore$ 当 $0<|t-x|<\delta$ 时 $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$).

$\therefore$ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 在 $x_0\in(a,b)$ 处连续, 记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. $F'(x_0)=f(x_0)$.

例1. 求导 (1) $f(x)=\int_0^x x\arctan\sqrt[3]{t}\,dt$ (2) $g(x)=\int_0^{x^3}\arctan\sqrt[3]{t}\,dt$.

(1) $f(x)=x\int_0^x \arctan\sqrt[3]{t}\,dt$ (常数). $f'(x)=x\arctan\sqrt[3]{x}+\int_0^x\arctan\sqrt[3]{t}\,dt$

(2) 令 $x^3=u$. $g'(x)=\frac{dg}{dx}=\frac{dg}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(\int_0^u\arctan\sqrt[3]{t}\,dt\right)\frac{du}{dx}$

$=\arctan\sqrt[3]{u}\cdot 3x^2=3x^2\arctan x$.

注: 计算变上限函数导数时, 可不计算出其定积分值, 直接求其导数.

例2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)\sin t\,dt}{\arctan^2 x\cdot\ln(1-2x^2)}$

$\frac{0}{0}$ 型: $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)\sin t\,dt}{x^2(-2x^2)}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2(e^{4x^2}-1)\sin 2x}{-8x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{16x^3}{-8x^3}=-2$

注: 分母为4阶: 积分前3阶, 积分后4阶.

积分限换为 x^2: 8阶 (某阶无穷小代入).

例. 比较无穷小量阶大小 $(x\to0)$. $\alpha(x)=\int_0^{x^2}\arctan u\,du$ $(1+1)\times2$, $\beta(x)=\int_0^{2x}(e^{u^2}-1)du$ $(2+1)\times1$

$\gamma(x)=\int_0^x x(\tan u-\arcsin u)du$. $(3+1+1)\times1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\arctan x^2}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3}{4x^3}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\beta(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(e^{4x^2}-1)}{3x^2}=\frac{8}{3}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\gamma(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\int_0^x(\tan u-\arcsin u)du}{x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(\tan u-\arcsin u)du}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\arcsin x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3))-(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{4x^3}=\frac{1}{24}$

9. 积分限为复合函数的求导: 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 均为可导函数, 则

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)dt\right)=\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\varphi_2(x)}f(t)dt-\int_0^{\varphi_1(x)}f(t)dt\right)$$

$$=f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x)-f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

例. $\frac{d}{dx}\left(\int_{2x}^{x^2}\arctan(1+t^2)dt\right)=2x\arctan(1+x^4)-2\arctan(1+4x^2)$.

不适用于 f 不连续

10. 微积分学基本公式另一证明：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

证明：设 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $G'(x)=f(x)$

而 $F(x)$ 是 $f(x)$ 一个原函数 $\therefore F'(x)=f(x)$ $\therefore \exists C$ s.t. $G(x)=F(x)+C$

又 $F(a)+C=G(a)$ $\therefore C=-F(a)$

$\therefore \int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b)+C = F(b)-F(a)$

11. 定积分的换元积分法：(1) 基于被积函数的换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，

φ 值域 $\varphi([\alpha,\beta])\subseteq[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ 换元换限 做一步算一步

证明：$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 存在原函数，设原函数为 $F(x)$。

由 Newton-Leibniz 公式知，$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

又 $\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\therefore F(\varphi(t))$ 为 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 原函数。

由 Newton-Leibniz 公式知 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta$

$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a)$

$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

例1. $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} \overset{\sqrt{1+x}=t}{=\!=\!=} \int_1^2 \frac{2t}{t+1}dt = 2\int_1^2 (1-\frac{1}{t+1})dt = 2[t-\ln(1+t)]\Big|_1^2 = 2-2\ln\frac{3}{2}$

例2. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{x=a\sin t}{=\!=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\, a\cos t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$
$(a>0)$
$= \frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi a^2$

注：几何意义：$r=a$ 的 $\frac{1}{4}S_\odot$

变式：$\int_0^1 dy\left(\int_0^{y^2}\sqrt{y^4-x^2}\,dx\right) = \int_0^1 \frac{\pi}{4}y^4 dy = \frac{\pi}{20}$

例3. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\le 0, \\ 3x^2+1, & x>0. \end{cases}$ $\int_0^2 f(x-1)dx \overset{x-1=t}{=\!=\!=} \int_{-1}^1 f(t)dt \overset{分段}{=} \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt$
$= -e^{-t}\Big|_{-1}^0 + (t^3+t)\Big|_0^1 = e+1$

例4. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

法一. 令 $x=\sin u$. 则 $dx=\cos u\,du$.　　被积函数>0, 积分>0.

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos u\,du}{\sin^2 u\cos u}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\csc^2 u\,du=-\cot u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}-1$$

法二. 令 $x=\frac{1}{t}$. 则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$.

$$I=\int_{2}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\sqrt{t^2-1}\Big|_{\sqrt{2}}^{2}=\sqrt{3}-1$$

(2) 对称区间上的积分

设 $f(x)$ 为连续函数, a 为正常数. 则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\underline{\int_0^a(f(x)+f(-x))dx}=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx. & f\text{为偶函数}\\ 0. & f\text{为奇函数}\end{cases}$

证明: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx\xlongequal{x=-u}-\int_a^0 f(-u)du+\int_0^a f(x)dx$

$$=\int_0^a f(-u)du+\int_0^a f(u)du=\int_0^a(f(x)+f(-x))dx.$$

例1. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}|\sin x|dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x^2+1)+2x}{x^2+1}|\sin x|dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)|\sin x|dx$

$$=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-2\cos x\Big|_0^{\pi}=4.$$

例2. $\int_{-1}^{1}\left(\ln\frac{2-x}{2+x}+1\right)x^{2020}$.

令 $f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$. 则 $f(-x)=\ln\frac{2+x}{2-x}=-f(x)$. ∴ $I=2\int_0^1 x^{2020}=\frac{2}{2021}$

例3. $\int_{-2}^{2}x^3\ln(1+e^x)dx=\int_0^2[x^3\ln(1+e^x)+(-x)^3\ln(1+e^{-x})]dx$

$$=\int_0^2 x^3\ln\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^2 x^4dx=\frac{32}{5}$$

偶·奇=奇

例4. $\int_{-1}^{1}\left[x^2\ln\frac{2+x}{2-x}+\sqrt{1-x^2}\right]dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx\xlongequal{几何意义}\frac{\pi}{2}$

例5. $\int_{-1}^{1}\frac{|x|^{2021}+1}{2021^x+1}dx=\int_0^1\left(\frac{|x|^{2021}+1}{2021^x+1}+\frac{|x|^{2021}+1}{2021^{-x}+1}\right)dx=\int_0^1(x^{2021}+1)dx=\frac{2023}{2022}$

注: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+a^{-1}}=1$

(3) 周期函数的积分

设 $f(x)$ 是周期为 $T>0$ 的连续函数. 则 $\int_a^{a+T}f(x)dx$ 与 a 无关.

证明: 法一. 固定 a 值. $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\overbrace{\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx}^{证明=首尾相消}$

插入0,T　　向0看齐

令 $x=u+T$, 则 $dx=du$. $\int_T^{a+T} f(x) = \int_0^a f(u+T)du = \int_0^a f(u)du$

∴ $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(u)du = \int_0^T f(x)dx$ 为定值.

法二: 记 $g(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx$. 则 $g'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$ ∴ $g(a)$ 与 a 无关, 为定值.

例1. $\int_0^{2022\pi} |\sin x| dx = 2022\int_0^{\pi} |\sin x| dx = 2022\int_0^{\pi} \sin x dx$

$= 2022(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 4044$.

变式1. $\int_0^{2022\pi} x|\sin x|dx \xlongequal{x=2022\pi-u} \int_{2022\pi}^{0} (2022\pi-u)|\sin(2022\pi-u)|(-du)$

$= \int_0^{2022\pi} (2022\pi-u)|\sin u|du$

$= 2022\pi\int_0^{2022\pi} |\sin u|du - \int_0^{2022\pi} u|\sin u|du$

∴ $I = \frac{1}{2}2022\pi\int_0^{2022\pi} |\sin u|du = 2022^2\pi$.

变式2. $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx \xlongequal{x=n\pi-u} \int_{n\pi}^{0} (n\pi-u)|\sin(n\pi-u)|(-du)$

$= \int_0^{n\pi} (n\pi-u)|\sin u|du = n\pi\int_0^{n\pi} |\sin u|du - \int_0^{n\pi} u|\sin u|du$

∴ $I = \frac{1}{2}n\pi\int_0^{n\pi} |\sin u|du = n^2\pi$. (平均值)

例2. 设 $f(x)$ 是周期为 $T>0$ 的连续函数. 证明 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$

将 x 放入某一周期内: $\forall x>0$, $\exists n\in N$ s.t. $nT\le x<(n+1)T$. $\left(\frac{n}{(n+1)T} < \frac{n}{x} \le \frac{1}{T}\right)$

记 $\int_0^T f(x)dx = A$. $\int_0^T |f(x)|dx = B$. (便于放缩)

$\int_0^x f(u)du = \int_0^{nT} f(u)du + \int_{nT}^x f(u)du = nA + \int_{nT}^x f(u)du$

∴ $nA - B < \int_0^x f(u)du \le nA + B$

∴ $\frac{nA-B}{x} < \frac{\int_0^x f(u)du}{x} \le \frac{nA+B}{x}$ 常

令 $x\to+\infty$, 则 $n\to+\infty$. 又 $\lim_{n\to\infty}\frac{nA-B}{x} = \lim_{n\to\infty}\frac{nA+B}{x} = \frac{A}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$

∴ $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(u)du}{x} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$

(2) 基于积分限的变量代换:

① $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 相反数变换: $x=-u$, 则 $I = \int_{-a}^{a} f(-u)du = \int_{-a}^{a} f(-x)dx$

② $\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx$ 倒数变换：$x=\frac{1}{u}$，则 $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{u^2}f(\frac{1}{u})du$

③ $\int_a^b f(x)dx$ 令 $x=(a+b)-u$，则 $I=\int_a^b f((a+b)-u)du$　　$x: a\to b$，$u: b\to a$，$x+u=a+b$

④ $\int_0^a f(x)dx$ 令 $x=a-u$，则 $I=\int_0^a f(a-u)du\ (a>0)$　　$x: 0\to a$，$u: a\to 0$，$x+u=a$

⑤ $\int_a^b f(x)dx$，中点变换：$x=\frac{a+b}{2}-u$，则 $I=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}-u)du$

x：a　$\frac{a+b}{2}$　b
u：$-\frac{b-a}{2}$　0　$\frac{b-a}{2}$

例1. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

基于被积函数的换元：令 $x=\tan u$，则 $dx=\sec^2 u\,du$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan u)}{1+\tan u}\sec^2 u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)du.$$

法一：切化弦. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{\sin u}{\cos u})du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin u+\cos u)du-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\,du$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin u+\cos u)du \xlongequal{\text{辅助角公式}} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\sin(u+\frac{\pi}{4})du=\frac{\pi}{8}\ln2+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt$$

$$\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-u}\frac{\pi}{8}\ln2-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\cos u\,du=\frac{\pi}{8}\ln2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\,du$$

(另：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin u+\cos u)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-u)du=\frac{\pi}{8}\ln2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\,du$)

$\therefore I=\frac{\pi}{8}\ln2.$

法二. 基于积分限的换元. 令 $u=\frac{\pi}{4}-t$，则 $du=-dt$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})dt=\frac{\pi}{4}\ln2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\frac{\pi}{4}\ln2-I$$

$\therefore I=\frac{\pi}{8}\ln2$

法三. 令 $x=\frac{1-u}{1+u}$，则 $dx=\frac{-2du}{(1+u)^2}$ （统一法二：$\begin{cases}x=\tan u\\ u=\frac{\pi}{4}-t\end{cases}$ $\therefore x=\tan(\frac{\pi}{4}-t)=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$ 令 $\tan t=u$）

$$I=\int_1^0\frac{\ln(1+\frac{1-u}{1+u})}{1+(\frac{1-u}{1+u})^2}\left(-\frac{2}{(1+u)^2}\right)du=\frac{\pi}{4}\ln2-\int_0^1\frac{\ln(1+u)}{1+u^2}du\quad\therefore I=\frac{\pi}{8}\ln2$$

例2. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，记 $F(x)=\int_0^x t f(x-t)dt$，求 $F'(x)$，$F''(x)$.

将被积表达式中 x 换出：令 $x-t=u$，则 $t=x-u$，$dt=-du$

$$F(x)=\int_0^x(x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x u f(u)du$$

$$F'(x)=xf(x)+\int_0^x f(u)du-xf(x)=\int_0^x f(u)du$$

$$F''(x)=f(x)$$

12. 定积分的分部积分法：定积分的分部积分公式：设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，则

$d(uv)=udv+vdu$ $\therefore \int_a^b u(x)v'(x)dx=\int_a^b[(u(x)v(x))'-u'(x)v(x)]dx$

计算一步代入一步. $=(u(x)v(x))\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$

例1. $\int_0^1 x\arctan x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan x\,d(x^2)=\frac{1}{2}(x^2\arctan x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-\arctan x)\Big|_0^1=\frac{\pi-2}{4}$

例2. $\int_1^e\sin(\ln x)dx=(x\sin(\ln x))\Big|_1^e-\int_1^e\cos(\ln x)dx$

两次分部 $=e\sin 1-(x\cos(\ln x))\Big|_1^e-\int_1^e\sin(\ln x)dx$

$=e\sin 1-e\cos 1+1-\int_1^e\sin(\ln x)dx$

$\therefore I=\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)$

例3. $\int_0^\pi x\sin x\,dx$

法一. $\int_0^\pi x\sin x\,dx=-\int_0^\pi x\,d(\cos x)=-(x\cos x)\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\,dx=\pi$

法二. 令 $x=\pi-u$，则 $dx=-du$.

$I=\int_0^\pi(\pi-u)\sin u\,du=\pi\int_0^\pi\sin u\,du-\int_0^\pi u\sin u\,du=2\pi-I$.

变式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d(\cos x)=-(x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$

注：无法基于积分限换元，前后统一.

例4. $f(x)=e^x+x\underline{\int_0^1 f(\sqrt{x})\overset{\text{常数}}{dx}}$ 求 $f(x)$.

处理根号：令 $\sqrt{x}=u$，则 $x=u^2$, $dx=2udu$. $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=2\int_0^1 uf(u)du$

$\therefore f(x)=e^x+2x\int_0^1 uf(u)du$.

令 $\int_0^1 uf(u)du=k$. $f(x)=e^x+2kx$.

两边同乘 x，积分：构造相同的积分 $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xe^x dx+k\int_0^1 2x^2dx=1+\frac{2}{3}k$ $\Rightarrow k=3$

$\therefore f(x)=e^x+6x$.

例5. $\int_1^e\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\int_1^e\ln x\,d\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^e+\int_1^e\frac{dx}{x(x+1)}=-\frac{1}{e+1}+\ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^e$

$= -\frac{1}{e+1} + \ln\frac{e}{e+1} + \ln 2 = \frac{e}{e+1} + \ln 2 - \ln(e+1)$.

例6. $f(x)=\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}dt$ 找t. 计算 $\int_0^1 f(x)dx$

解. $\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx = -\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}\Big|_0^1 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

变式. $f(x)=\int_1^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}}dt$ 找t. 计算 $\int_0^1 f(x)dx$

解. $\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = -\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_0^1 = \frac{2(1-\sqrt{2})}{3}$

例7. 设$f(x)$在$[0,1]$连续,证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ (2) $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

(3) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$. 并计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}dx$.

(1) 令 $x=\frac{\pi}{2}-u$. 则 $dx=-du$.

$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2}-u))(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)du$

(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx \xlongequal{令x=\pi-u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)du$ $\therefore I_2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

(3) 令 $x=\pi-u$. 则 $dx=-du$

$I_3 = \int_0^{\pi}(\pi-u)f(\sin u)du = \pi\int_0^{\pi} f(\sin u)du - \int_0^{\pi} u f(\sin u)du$

$\therefore I_3 = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

$\therefore I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$

13. Wallis公式: (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 并求值.

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 则 $dx=-dt$.

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n(\frac{\pi}{2}-t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. 则 $I_0=\frac{\pi}{2}$. $I_1=1$. 当 $n\geq 2$ 时

$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\,d(\cos x) = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

$\therefore I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

$\therefore$ 当 $n=2m+1$ $(m=1,2,\cdots)$ 时. $I_n = I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}I_{2m-1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1$

$= \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$

当 $n=2m(m=1,2,\cdots)$ 时 $I_m = I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为奇} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶} \end{cases}$ (Wallis公式)

例1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$

例2. $\int_{-1}^{1} (2x+3|x|)^3 \sqrt{1-x^2}\,dx \xlongequal{\text{奇偶分析}} \int_{-1}^{1} [(8x^3+54x|x|^2)+(36x^2|x|+27|x|^3)]\sqrt{1-x^2}\,dx$

对称区间

$= 126\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

令 $x=\sin t$, 则 $dx=\cos t\,dt$

$I = 126\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^2 t\,dt = 126\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t)\,dt = 126\left(\frac{2}{3}\times 1 - \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1\right) = \frac{84}{5}$

变式. $\int_{-1}^{1} (2x-|x|)^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} (4x^2+x^2-4x|x|)\sqrt{1-x^2}\,dx = 10\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

令 $x=\sin t$, 则 $dx=\cos t\,dt$.

$\therefore \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$

$\therefore I = \frac{5}{8}\pi$

例3. $\int_0^{\pi} x\sin^6 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^6 x\,dx = \frac{\pi}{2}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \pi\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\pi^2$

变式. $\int_0^{n\pi} x\sin^6 x\,dx \quad (n\in N^*)$

令 $x=n\pi-u$, 则 $dx=-du$.

$I = \int_0^{n\pi} (n\pi-u)\sin^6 u\,du = n\pi\int_0^{n\pi} \sin^6 u\,du - \int_0^{n\pi} u\sin^6 u\,du$

$\therefore I = \frac{n\pi}{2}\cdot n\int_0^{\pi} \sin^6 u\,du = n^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u\,du = n^2\pi\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}n^2\pi^2$

(2) $\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (n\in N^*)$ 　　阶乘转换为累积

证明: 当 $k\in N^*$ 时, $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ 则 $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} < \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$

$\therefore \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)^2 < \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} = \frac{1}{2n+1}$

$\therefore \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

当 $k\in N^*$ ($k\geq 2$) 时 $\frac{2k-1}{2k}>\frac{2k-2}{2k-1}$ $\therefore \prod_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2k}>\prod_{k=2}^{n}\frac{2k-2}{2k-1}$

$\therefore \left(\prod_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)^2>\prod_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2k}\prod_{k=2}^{n}\frac{2k-2}{2k-1}=\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}$

$\therefore \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2>\frac{1}{4n} \Rightarrow \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\therefore \frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

例. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 证明:

(1) $\{I_n\}$ 单减且 $\lim_{n\to\infty}I_n=0$. (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ($\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\pi}$. Wallis 公式)

(1) $I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=I_n$ $\therefore \{I_n\}\downarrow$ 且 $I_n>0$

由单调收敛准则知 $\{I_n\}$ 收敛 又 $0<I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{\pi}{2}$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$ $\therefore \lim_{n\to\infty}I_{2n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}I_n=0$

(2) $I_{n+1}=\frac{n}{n+1}I_{n-1}$ $\therefore \frac{n}{n+1}=\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}<\frac{I_{n+1}}{I_n}<1$ $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$

(3) $I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$ $I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2}=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

例. 设 $|y|\leq1$. 求 $F(y)=\int_{-1}^{1}|x-y|e^x dx$ 最大值.

$F(y)=\int_{-1}^{y}(y-x)e^x dx+\int_y^1(x-y)e^x dx$

$=y\int_{-1}^{y}e^x dx-\int_{-1}^{y}xe^x dx-\int_1^y xe^x dx+y\int_1^y e^x dx$

$F'(y)=2e^y-e-e^{-1}$. $F''(y)=2e^y>0$

驻点 $y_0=\ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)$ $F''(y_0)>0$

又 $F(1)=e-e^{-1}$. $F(-1)=e+e^{-1}$ $\therefore F_{max}=F(-1)=e+e^{-1}$

14. 变上限函数与定积分不等式:

1. 变上限函数: 例1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续. 且 $f(0)=0$. $f'(0)=2$. 计算 $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t f(x-t)dt}{x-\arctan x}$.

记 $F(x)=\int_0^x t f(x-t)dt$ 则 $F'(x)=\int_0^x f(u)du$，$F''(x)=f(x)$

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}\overset{①}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)=1$$

注①：不能用 L'Hospital　°1 $f'(x)$ 在 $U(0)$ 不一定存在　°2 $\lim f'(x)$ 不一定等于 $f'(0)$.

例2. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续且严格单调递增，证明 $F(x)=\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内严格单调递增

$$F'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad \text{不同类：统一}$$

法一 化定积分 $F'(x)=\frac{f(x)\int_0^x du-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\frac{\int_0^x [f(x)-f(u)]du}{x^2}$

当 $x>0$ 时 ∵ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增 ∴ $\int_0^x [f(x)-f(u)]du>0$.

当 $x<0$ 时 ∵ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递增 ∴ $\int_0^x [f(x)-f(u)]du=\int_x^0 [f(u)-f(x)]du>0$

∴ $F'(x)>0$　∴ $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内单调递增.

法二 积分中值定理 $xf(x)-\int_0^x f(u)du=xf(x)-xf(\theta x)>0$　$(0<\theta<1)$

例3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有2阶连续导数，且 $f(\frac{a+b}{2})=0$. 记 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$. 证明

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M}{24}(b-a)^3$$ ← 2阶导 → 3次 → Taylor展开

法一 展原函数. 2阶→3阶. 匹配.

设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. 则 $F'(x)=f(x)$　$F''(x)=f'(x)$

将 $F(x)$ 在 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 处 Taylor 展开

$$F(x)=\int_a^{x_0}f(t)dt+f(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$
$$=\int_a^{x_0}f(t)dt+\frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f''(\xi)}{6}(x-x_0)^3$$

将 $x=a$. $x=b$ 代入. ∃ $\xi_1\in(a,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,b)$ s.t.

$$F(b)=\int_a^{x_0}f(t)dt+\frac{f'(x_0)}{8}(b-a)^2+\frac{f''(\xi_2)}{48}(b-a)^3$$
$$F(a)=\int_a^{x_0}f(t)dt+\frac{f'(x_0)}{8}(b-a)^2-\frac{f''(\xi_1)}{48}(b-a)^3$$

两式相减得：$\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\frac{f''(\xi_2)}{48}(b-a)^3+\frac{f''(\xi_1)}{48}(b-a)^3\right|\le\frac{M}{24}(b-a)^3$

注：由导数介值性，$\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $\int_a^b f(x)dx = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3$.

法二. 展开 $f(x)$ 至2阶，积分至3阶

将 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 处 Taylor 展开. $\exists \xi_x \in (a,b)$ s.t.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-x_0)^2$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-x_0)^2$$

两边求定积分且 $\int_a^b (x-x_0)dx = \frac{1}{2}(x-x_0)^2\Big|_a^b = 0$.

$$\therefore \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-x_0)^2dx\right| \le \frac{M}{2}\left|\int_a^b (x-x_0)^2dx\right| = \frac{M}{24}(b-a)^3$$

2. 定积分不等式：(1) 柯西不等式：设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$

法一. 构造. $\forall t \in \mathbb{R}$. $[tf(x)+g(x)]^2 \ge 0$. $\therefore \int_a^b [tf(x)+g(x)]^2dx \ge 0$

即 $\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)t^2 + 2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)t + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \ge 0$

①当 $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ 时，$\forall x \in [a,b]$ $f(x)=0$. 成立.

②当 $\int_a^b f^2(x)dx > 0$ 时，$\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \le 0$

$\therefore \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

法二. 推广离散 Cauchy 不等式

将 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间，分点 $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$，取点 $\xi_k = x_k$

$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)$. 根据 Cauchy 不等式，有

$$\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\right]^2 = \left[\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{b-a}{n}}f(x_k)\cdot\sqrt{\frac{b-a}{n}}g(x_k)\right]^2$$

$$\le \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}[f(x_k)]^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}[g(x_k)]^2$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\right]^2 \le \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}[f(x_k)]^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}[g(x_k)]^2$$

即 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$

法三. 变限 —— 固定下限. 由结论 $\forall b > a$ 成立，∴ 改变上限

设 $F(x)=\int_a^x f^2(t)dt\cdot\int_a^x g^2(t)dt-\left(\int_a^x f(t)g(t)dt\right)^2$.

$F'(x)=f^2(x)\int_a^x g^2(t)dt+g^2(x)\int_a^x f^2(t)dt-2f(x)g(x)\int_a^x f(t)g(t)dt$

积分限相同 放入 $=\int_a^x[f^2(x)g^2(t)-2f(x)g(x)f(t)g(t)+f^2(t)g^2(x)]dt$

$=\int_a^x[f(x)g(t)-f(t)g(x)]^2dt\geq 0$

$\therefore F(x)$ 在 $[a,b]\nearrow$. $\therefore F(b)\geq F(a)=0$.

例1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 且 $f(x)>0$ 证明 $\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geq(b-a)^2$

$I=\int_a^b[\sqrt{f(x)}]^2dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{[\sqrt{f(x)}]^2}\geq\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2=(b-a)^2$

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且单调递增 证明 $\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

法一 变限. 设 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$ $(x\in[a,b])$.

$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{1}{2}(x-a)f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt$ 统一

I 化积分 $F'(x)=\frac{1}{2}\int_a^x f(x)dt-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]dt\geq 0$

II 积分中值 $F'(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(\xi)(x-a)=\frac{1}{2}(x-a)[f(x)-f(\xi)]\geq 0$ $(\xi\in(a,x))$

$\therefore F'(x)\geq 0$ F 在 $[a,b]\nearrow$ $\therefore F(b)\geq F(a)=0$.

法二 要证 $\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

只需证 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\geq 0$ (积分限相同, 放入)

单调性的定义: $(x-y)(f(x)-f(y))\geq 0$

$\therefore (x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]\geq 0$ 常数项

又 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx=0$ $\therefore\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]=\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\geq 0$

$\therefore$ 即证

例3. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数 则 $\forall x\in[0,1]$, 有 $|f(x)|\leq\int_0^1[|f(x)|+|f'(x)|]dx$

建立 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 关系: $f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)$ (a 任取)

$\therefore|f(x)|\leq\left|\int_a^x f'(t)dt\right|+|f(a)|\leq\left|\int_a^x|f'(t)|dt\right|+|f(a)|\leq\int_0^1|f'(t)|dt+|f(a)|$

(a, x 大小关系不确定)

∴需取 $|f(a)| \le \int_0^1 |f(x)|dx$，可取 $|f(a)| = |f(x)|_{min}$ 或 $avg|f(x)|$.

法一 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 连续，设 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处取最小值 $|f(a)|$.

$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a) \Rightarrow |f(x)| = |\int_a^x f'(t)dt + f(a)| \le |\int_a^x f'(t)dt| + |f(a)|$

$\le |\int_a^x |f'(t)|dt| + \int_0^1 |f(a)|dx \le \int_0^1 |f'(t)|dt + \int_0^1 |f(x)|dx$

$= \int_0^1 [|f(x)| + |f'(x)|]dx$

法二 ∵ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，则 $\exists \xi \in [0,1]$ s.t. $\int_0^1 |f(x)|dx = |f(\xi)|$

∴ $f(x) = f(\xi) + \int_\xi^x f'(t)dt$

$|f(x)| \le \int_0^1 |f(x)|dx + |\int_\xi^x f'(t)dt| \le \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |f'(x)|dx$

$= \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|)dt$

例4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明 $\int_a^b |f''(x)|dx \ge \frac{4}{b-a}\max_{a\le x\le b}|f(x)|$

设 $|f(x_0)| = \max_{a\le x\le b}|f(x)|$，若 $f(x_0)=0$，显然。

若 $f(x_0)\ne 0$，则 $x_0 \in (a,b)$，在 $[a,x_0]$，$[x_0,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理

$\exists \xi_1 \in (a,x_0)$，$\xi_2 \in (x_0,b)$ s.t. $f(x_0)-f(a) = f'(\xi_1)(x_0-a)$，$f(b)-f(x_0) = f'(\xi_2)(b-x_0)$

$\Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)}{x_0-a}$，$f'(\xi_2) = \frac{-f(x_0)}{b-x_0}$

∴ $\int_a^b |f''(x)|dx \ge \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)|dx \ge |\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x)dx| = |f'(\xi_2) - f'(\xi_1)|$

$= |-\frac{f(x_0)}{b-x_0} - \frac{f(x_0)}{x_0-a}| = \frac{|f(x_0)|(b-a)}{(b-x_0)(x_0-a)} \ge \frac{|f(x_0)|(b-a)}{\frac{1}{4}(b-a)^2} = \frac{4}{b-a}\max_{a\le x\le b}|f(x)|$

例5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明 $\int_0^1 |f'(x)-f(x)|dx \ge \frac{1}{e}$

$f'(x)-f(x)$：$\frac{f(x)}{e^x}$ 构造

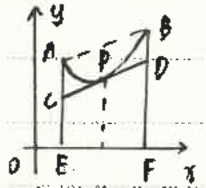
法一 直接构造 $\int_0^1 (\frac{f(x)}{e^x})'dx = \int_0^1 e^{-x}(f'(x)-f(x))dx = \frac{f(x)}{e^x}\Big|_0^1 = e^{-1}$

∴ $\frac{1}{e} = |\int_0^1 e^{-x}(f'(x)-f(x))dx| \le \int_0^1 |f'(x)-f(x)|dx$

法二 $\int_0^1 e^{-x}f'(x)dx = \int_0^1 e^{-x}df(x) = e^{-x}f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}f(x)dx = \frac{1}{e} + \int_0^1 e^{-x}f(x)dx$

∴ $\frac{1}{e} = \int_0^1 e^{-x}[f'(x)-f(x)]dx \le \int_0^1 e^{-x}|f'(x)-f(x)|dx \le \int_0^1 |f'(x)-f(x)|dx$

例6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导且 $f''(x)>0$，证明：$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$



几何意义：$\int_a^b f(x)dx = S_{ABFE}$

$\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] = S_{AEFB}$

$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = S_{CEFD}$

∵结论 $\forall x\in[a,b]$ 都成立，将固定上限 b 改为可变上限 x 从而构造

$F(x) = \int_a^x f(t)dt - (x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)$，$G(x) = \frac{1}{2}(x-a)[f(a)+f(x)] - \int_a^x f(t)dt$

∵ $f''(x)>0$ ∴ $f'(x)$ 在 $[a,b]$ ↗.

$$F'(x) = f(x) - f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{1}{2}(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)$$
$$= f'(\xi)\left(x-\frac{a+x}{2}\right) - \frac{x-a}{2}f'\left(\frac{a+x}{2}\right)$$
$$= \frac{x-a}{2}\left(f'(\xi)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right) \ge 0 \quad \left(\xi\in\left(\frac{a+x}{2},x\right)\right)$$

∴ F 在 $[a,b]$ ↗，∴ $F(b)\ge F(a)\ge 0$

同理 $G'(x) = \frac{1}{2}[f(a)+f(x)] + \frac{1}{2}(x-a)f'(x) - f(x)$
$$= \frac{1}{2}(x-a)f'(x) - \frac{1}{2}[f(x)-f(a)]$$
$$= \frac{1}{2}(x-a)f'(x) - \frac{1}{2}(x-a)f'(\eta) = \frac{1}{2}(x-a)(f'(x)-f'(\eta)) > 0 \quad (\eta\in(a,x))$$

∴ $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上↗ ∴ $G(b)\ge G(a)\ge 0$

∴ $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$

变式：$f(x)$ 为凹函数.

法一：∵ $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凹函数，则 $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $\left(x_0=\frac{a+b}{2}\right)$

切线放缩 $\int_a^b f(x)dx \ge f(x_0)(b-a) + f'(x_0)\underline{\int_a^b (x-x_0)dx} = f(x_0)(b-a)$

∴ $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

法二：对称变换：令 $x=(a+b)-u$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$
$$= \int_{\frac{a+b}{2}}^b f((a+b)-u)du + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$
$$\ge 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(\frac{(a+b)-u+u}{2}\right)du = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)du = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

∴ $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$\because f$ 为 $[a,b]$ 上的凹函数 $\therefore \forall x\in[a,b]$ $\exists t\in[0,1]$ s.t. $x=ta+(1-t)b$.

且 $f(x)\le t f(a)+(1-t)f(b)$

实线放缩 $\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 f(ta+(1-t)b)(b-a)dt\le (b-a)\int_0^1[tf(a)+(1-t)f(b)]dt$

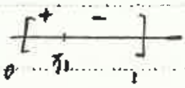
$=\frac{(b-a)[f(a)+f(b)]}{2}$ $\therefore f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$

例7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 且 $\int_0^1 f(x)dx=0$. $\int_0^1 xf(x)dx=0,\cdots,\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx=0$

(1) 证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 至少 n 个零点.

当 $n=2$ 时. $\int_0^1 f(x)dx=0$ $\int_0^1 xf(x)dx=0$

法一 反证法 $\int_0^1 f(x)dx=f(x_1)=0$ $(x_1\in(0,1))$



若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 仅一零点 x_1 则 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$, $(x_1,1)$ 保号, 且在 $(0,x_1)$, $(x_1,1)$ 异号

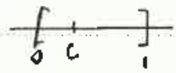
不妨设 $0<x<x_1$ 时 $f(x)>0$.

$\int_0^1(x-x_1)f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx-x_1\int_0^1 f(x)dx=0$

$=\int_0^{x_1}(x-x_1)f(x)dx+\int_{x_1}^1(x-x_1)f(x)dx<0$ 矛盾

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 有两零点

法二 原函数+Rolle. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ $F'(x)=f(x)$



$F(0)=0$ $F(1)=0$

$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\,dF(x)=xF(x)\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)dx=0$

$\therefore \exists c\in(0,1)$. s.t. $F(c)=\int_0^1 F(x)dx=0$

$\therefore$ 由Rolle定理知. $\exists x_1\in(0,c)$, $x_2\in(c,1)$ s.t. $f(x_1)=f(x_2)=0$

类似可证 $n-1$ 时至少 n 个零点.

二项式定理

(2) $\int_0^1 x^n f(x)dx=1$ 证明: $\exists\xi\in[0,1]$ s.t. $|f(\xi)|\ge 2^n(n+1)$

$\int_0^1(x-\alpha)^n f(x)dx=\int_0^1\sum_{k=0}^n C_n^k\alpha^{n-k}x^k f(x)dx=\sum_{k=0}^n C_n^k\alpha^{n-k}\int_0^1 x^k f(x)dx=1$

反证: 假设 $\forall x\in[0,1]$. $|f(x)|<2^n(n+1)$.

取$\alpha=\frac{1}{2}$. $\left|\int_0^1 (x-\alpha)^n f(x)dx\right| \le \int_0^1 |(x-\alpha)^n f(x)|dx < 2^n(n+1)\int_0^1 |(x-\alpha)^n|dx$

$= 2^n(n+1)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x)^n dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-\frac{1}{2})^n dx\right)$

$= 2^n(n+1)\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\times 2 = 1$ 矛盾.

$\therefore \exists \xi_1 \in (0,1)$ s.t. $|f(\xi_1)| \ge 2^n(n+1)$.

例8. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{1+x^2}dx$

$\xlongequal{\frac{\pi}{4}-x=u} \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin u}{1+(\frac{\pi}{4}-u)^2}du = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin u}{1+(\frac{\pi}{4}-u)^2} + \frac{\sin(-u)}{1+(\frac{\pi}{4}+u)^2}\right]du$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+(\frac{\pi}{4}-u)^2} - \frac{1}{1+(\frac{\pi}{4}+u)^2}\right]\sin u\, du > 0$.

例9. 设$f(x)$在$[0,\pi]$连续 且 $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$. 证明: 在$(0,\pi)$内存在两点 $\xi_1 \ne \xi_2$ s.t. $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

法一. 反证法. $\because \int_0^\pi f(t)dt = 0$ $\therefore$由积分中值定理 $\exists \eta_1 \in (0,\pi)$ s.t. $f(\eta_1)=0$.

若$f(x)$在$(0,\pi)$内只有一个零点η_1, 则 $f(x)$在$(0,\eta_1)$, (η_1,π)内保号.

而 $\int_0^\pi f(t)dt=0$ $\therefore f(x)$在$(0,\eta_1)$, (η_1,π)异号.

不妨设当$x\in(0,\eta_1)$时 $f(x)>0$. 当$x\in(\eta_1,\pi)$时 $f(x)<0$.

记$g(x)=(\cos x-\cos\eta_1)f(x)$. 则 $g(x)>0$ $\forall x\in(0,\pi)$, $x\ne\eta_1$

$\therefore 0 < \int_0^\pi g(x)dx = \int_0^{\eta_1} f(x)\cos x dx - \cos\eta_1 \int_{\eta_1}^\pi f(x)dx = 0$. 矛盾.

法二. 原函数+Rolle. 令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 则$F(0)=F(\pi)=0$.

且 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx = \int_0^\pi \cos x\, d(F(x)) = \int_0^\pi F(x)\sin x dx=0$

由积分中值定理. $\exists \eta\in(0,\pi)$ s.t. $F(\eta)\sin\eta=0$ $\therefore F(\eta)=0$

由$F(0)=F(\eta)=F(\pi)=0$ 由Rolle定理知. $\exists \xi_1\in(0,\eta)$, $\xi_2\in(\eta,\pi)$

s.t. $F'(\xi_1)=0$. $F'(\xi_2)=0$ 即$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

例10. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续 且 $\int_a^b f(x)dx=0$ 则$\exists \xi\in(a,b)$ s.t. $\int_a^\xi f(x)dx + f(\xi)=0$.

$\int_a^{\xi} f(x)dx + f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_a^{x} f(t)dt + f(x) = 0$ 有解 $\Leftrightarrow g(x) + g'(x) = 0$ 有解

令 $F(x) = e^x \int_a^x f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $F(a) = F(b) = 0$

由 Rolle 定理知，$\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $F'(\xi) = 0$ $\therefore \int_a^{\xi} f(x)dx + f(\xi) = 0$

例11. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 连续，在 $(0,2)$ 可导，且 $\int_0^2 e^{4-x^2} f(x)dx = 2f(2)$，证明：$\exists \xi \in (0,2)$

s.t. $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$

$f'(\xi) = 2\xi f(\xi) \Leftrightarrow f'(x) - 2x f(x) = 0$ 有解 $\Leftrightarrow (e^{-x^2} f(x))' = 0$ 有解

令 $F(x) = e^{-x^2} f(x)$，则 $F'(x) = e^{-x^2}(f'(x) - 2x f(x))$

由积分中值定理知，$\exists \eta \in (0,2)$ s.t. $2e^{4-\eta^2} f(\eta) = 2f(2)$

$\Leftrightarrow e^{-\eta^2} f(\eta) = e^{-2^2} f(2)$ 即 $F(\eta) = F(2)$

又 $F(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 连续，在 $(\eta, 2)$ 可导，由 Rolle 定理知，$\exists \xi \in (\eta, 2) \subset (0,2)$

s.t. $F'(\xi) = 0$，而 $F'(x) = e^{-x^2}(f'(x) - 2x f(x))$ $\therefore f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$

例12. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x+2) - f(x) = x$，$\int_0^2 f(x)dx = 1$，求 $\int_1^3 f(x)dx$.

法一. $\int_1^3 f(x)dx \xlongequal{x=u+2} \int_{-1}^1 f(u+2)du = \int_{-1}^1 (f(u) + u)du = \int_{-1}^1 f(u)du$

又 $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 (f(x+2) - x)dx \xlongequal{x+2=u} \int_1^2 f(u)du + \frac{1}{2}$

$\therefore \int_1^3 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(u)du = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$

$= (\int_1^2 f(u)du + \frac{1}{2}) + \int_0^1 f(u)du = \frac{3}{2}$

法二. $\because f$ 连续 $\therefore \frac{d}{dx}(\int_x^{x+2} f(t)dt) = f(x+2) - f(x) = x$

$\therefore F(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt = \frac{1}{2}x^2 + C$ 又 $F(0) = 1$ $\therefore C = 1$

$\therefore F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ $\therefore \int_1^3 f(x)dx = \frac{3}{2}$

例13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

配对：记 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$，$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$.

$I \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du = J$ $\therefore 2I = I + J = \frac{\pi}{2}$ $\therefore I = \frac{\pi}{4}$

更一般的 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha x}{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x}dx = \frac{\pi}{4}$ $(\alpha>0)$

例14. $\begin{cases} e^x+tx-e=0, \\ \int_2^{2y} e^{-s^2}ds - t(y^2+1)=0. \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$.

$t=0$ 时 $x=1$, $y=1$ ($y\neq1$ 时 $\int_2^{2y}e^{-s^2}ds\neq0$).

$e^x\frac{dx}{dt}+x+t\frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-\frac{x}{e^x+t} \Rightarrow \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-e^{-1}$

$e^{-4y^2}\cdot2\frac{dy}{dt}-(y^2+1)-2ty\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{y^2+1}{2e^{-4y^2}-2ty} \Rightarrow \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=e^4$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=-e^5$

例15. 证明: $\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

法一: 三角换元 $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal{x=\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin u)du$ 不换cos:不易比较

$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal{x=\cos u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos u)du$

当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时 $1\le \sin x+\cos x\le\sqrt2<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}-\sin x>\cos x$

且 $\cos x$, $\frac{\pi}{2}-\sin x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(\sin u)-\sin(\cos u)]du$

$\xlongequal{诱导} \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(\frac{\pi}{2}-\sin u)-\sin(\cos u)]du>0$.

法二: 放缩 当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时, $0\le\sin x\le x$, 则 $\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx > \int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx=1$

$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} < \int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=1$ $\therefore \int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx > \int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

例16. $y=y(x)$ 由 $e^y+y-x-1=0$ 所确定, 求 $\int_0^e y(x)dx$

$x=e^y+y-1$, $dx=(e^y+1)dy$ 当 $x=0$ 时 $y=0$, 当 $x=e$ 时 $y=1$.

$\therefore \int_0^e y(x)dx \xlongequal{换元} \int_0^1 y(e^y+1)dy = (\frac{y^2}{2}+(y-1)e^y)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$

例17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ $(a\le x\le b)$, 若 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处连续 证明 $F'(x_0)=f(x_0)$

$\because$ $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\therefore$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, $\forall x\in U(x_0,\delta)$ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall|\Delta x|<\delta$ $\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)dt-f(x_0)\right|$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)dt\right)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}[f(t)-f(x_0)]dt\right|$$

$$\le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)-f(x_0)|dt\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\varepsilon\, dt\right| = \varepsilon.$$

例8. 设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，且$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^3}{2}$，证明$\int_0^1[f(x)]^2dx \geq \frac{5}{12}$.

法一. 由积分条件入手 $\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^3}{2}$ 当且仅当$f(x)=\frac{3}{2}x^2$时取等

$$\int_0^1\left[f(x)-\frac{3}{2}x^2\right]^2dx = \int_0^1[f(x)]^2dx - 3\int_0^1 x^2 f(x)dx + \frac{9}{20} \geq 0$$

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx \xlongequal{\text{分部积分}} -\int_0^1 x^2 d\left(\int_x^1 f(t)dt\right) = -\left(x^2\int_x^1 f(t)dt\right)\Big|_0^1 + 2\int_0^1\left(x\int_x^1 f(t)dt\right)dx$$

$$\geq 2\int_0^1 x\cdot\frac{1-x^3}{2}dx = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \int_0^1[f(x)]^2dx \geq 3\int_0^1 x^2 f(x)dx - \frac{9}{20} \geq \frac{9}{20}$$ 当且仅当 $f(x)=\frac{3}{2}x^2$时成立.

法二. 直接利用条件. $\int_0^1\left[\int_x^1 f(t)dt\right]dx = \left[x\int_x^1 f(t)dt\right]\Big|_0^1 + \int_0^1 x f(x)dx$

$$= \int_0^1 x f(x)dx \geq \int_0^1\frac{1-x^3}{2}dx = \frac{3}{8}$$

$$\left[\int_0^1 x f(x)dx\right]^2 \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \int_0^1 x^2dx\int_0^1[f(x)]^2dx = \frac{1}{3}\int_0^1[f(x)]^2dx$$

$$\therefore \int_0^1[f(x)]^2dx \geq 3\left[\int_0^1 x f(x)dx\right]^2 \geq \frac{27}{64}$$

法三. 构造 $\int_0^1[f(x)-x]^2dx = \int_0^1[f(x)]^2dx - 2\int_0^1 x f(x)dx + \frac{1}{3} \geq 0$

$$\int_0^1 x f(x)dx = -\int_0^1 x\, d\left(\int_x^1 f(t)dt\right) = -\left(x\int_x^1 f(t)dt\right)\Big|_0^1 + \int_0^1\left[\int_x^1 f(t)dt\right]dx$$

$$\geq \int_0^1\frac{1-x^3}{2}dx = \frac{3}{8}$$

$$\int_0^1[f(x)]^2dx \geq 2\int_0^1 x f(x)dx - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

例9. 设$f(x)$在$(0,1)$可导，且$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$存在，证明：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$存在.

极限⇒有界　导数 ← Lagrange 原函数

$\because \lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$存在，$\therefore f'(x)$在$x=0$某邻域内有界

即 $\exists M>0,\ \delta_1>0,\ \forall x\in U_+(0,\delta_1)$时 $|f'(x)|\leq M$.

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{M}\}$. $\therefore \forall x_1,x_2\in(0,\delta)$

$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1-x_2)| \leq M\delta \leq \varepsilon$

由函数极限的Cauchy收敛准则知 $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ 存在。

例20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，若对 $\forall x\in[a,b]$ 均有 $f''(x)+e^x f'(x)-f(x)=0$

证明：$f(x)\equiv 0$.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 不恒为0，不妨设 $\exists x_0\in[a,b]$ 有 $f(x_0)>0$.

又 $f(a)=f(b)=0$ $\therefore$ $f(x)$ 在 (a,b) 内取最大值

记 $f(\xi)=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$，则 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 处取极大值 $\therefore f'(\xi)=0$.

$\therefore f''(\xi)=f(\xi)>0$ 由极值存在第二充分条件知 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 处取极小值，矛盾

$\therefore \forall x\in[a,b]$，$f(x)=0$.

例21. 设 $a_n=\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^n\right]^{\frac{1}{n^2}}$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

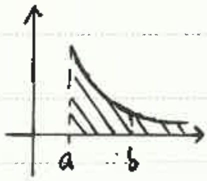
$$\lim_{n\to+\infty}\ln a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\left[(x-1)+\frac{1}{x+1}\right]dx=\ln 2-\frac{1}{4}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=2e^{-\frac{1}{4}}$

§1 反常积分的概念和计算 - §2 反常积分的收敛判别法

1. 无限区间上的反常积分的定义：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，对 $\forall b>a$，若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的反常积分（$\int_a^{+\infty} f(x)dx$）收敛，即 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.



若此极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散

类似地，可定义 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^{+\infty}f(x)dx$$ a为任意实数，当且仅当两个反常积分均收敛时才收敛.

三个重要极限：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{e^x}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0\quad(\alpha>0)$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}}=-\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha=0\quad(\alpha>0)$

例1. 在地球表面发射火箭，要使火箭克服地心引力无限远离地球，试问：初速度 v_0 至少多大？

$$F(x)=G\frac{Mm}{x^2}\qquad W=\int_R^{+\infty}F(x)dx=\int_R^{+\infty}G\frac{Mm}{x^2}dx=-\frac{GMm}{x}\Big|_R^{+\infty}=\frac{GMm}{R}$$

$$\begin{cases} mg=G\frac{Mm}{R^2} \\ -\frac{GMm}{R}=0-\frac{1}{2}mv_0^2 \end{cases}\Rightarrow v_0=\sqrt{2gR}=11.2\,km/s$$

例2. $\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\arctan(x+2)\Big|_{-1}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

注：F 在"$+\infty$"处的值应看作"$+\infty$"处极限值

例3. $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=(-x^2e^{-x})\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=(-2xe^{-x})\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$

$=(-2e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=2$

推广：$I_n=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=(-x^ne^{-x})\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1}=\cdots=n!$ $(n\in N^*)$

例4. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，计算 $\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}dx$

不能分拆：$\frac{x}{x^3}\to+\infty\ (x\to0)$ ∴ $x-\sin x$ 作整体

$I=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x-\sin x)d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{x-\sin x}{2x^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ (*)

$= -\frac{1-\cos x}{2x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{4}$

另解: 积分式(*) $= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}dx \xlongequal{\frac{x}{2}=u} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du$

$= -\frac{\sin^2 u}{2u}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2u}{u}du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2u}{2u}d(2u) = \frac{\pi}{4}$

例5. 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 的敛散性.

$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1), & p\neq 1,\\ \ln b, & p=1.\end{cases}$

$\therefore \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\le 1.\end{cases}$

∴当 $p\le 1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散于 $+\infty$. 当 $p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛.

且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ 通常称之为 p-积分

例6. 求 $I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx$, $J=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$ $(a>0)$.

法一. $I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{a}(e^{-ax}\sin bx)\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{a}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$

$= -\frac{b}{a^2}(e^{-ax}\cos bx)\Big|_0^{+\infty} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I.$

$\therefore I=\frac{b}{a^2+b^2}$, $J=\frac{a}{a^2+b^2}$

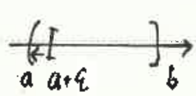
法二. Euler公式: $\int_0^{+\infty}e^{(-a+ib)x}dx = \frac{1}{-a+ib}[e^{-ax}(\cos bx+i\sin bx)]\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = J+iI.$

2. 无界函数反常积分(瑕积分): 定义: 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义, 且在 $x=a$ 的任一右邻域内无界, 在任何内闭区间 $[a+\varepsilon,b]$ $(\varepsilon>0)$ 上有界且可积. 若存在 $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

则称 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 即 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

若此极限不存在, 则称此广义积分发散



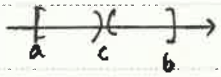
$f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域无界. 此时点 a 称为 $f(x)$ 的瑕点. ∴ $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也称为瑕积分

类似地，定义无界函数的反常积分。设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上定义，且在 $x=b$ 的任一左邻域内无界，但在任何闭区间 $[a,b-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ 内有界且可积，定义反常积分

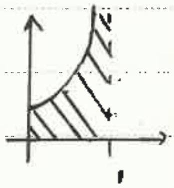
$\int_a^b f(x)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx.$

对于 $f(x)$ 的瑕点，$c\in(a,b)$，则定义瑕积分 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

$=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$ （ε_1、ε_2 无关）.



其中 $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上定义，且在 $x=c$ 的任一邻域内无界，但在任何区间 $[a,u]\subset[a,c)$，$[v,b]\subset(c,b]$ 上均可积，当且仅当右边两个瑕积分均收敛时，左边的瑕积分才收敛.



例1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sec^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d(\tan x)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}d(\tan x)$ 不存在 （$\frac{\pi}{2}$ 瑕点）

例2. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$

例3. 讨论 $\int_0^1\frac{dx}{x^q}$ （q-积分）的敛散性.

$q>0$ $f(x)$ 在 $(0,1]$ 连续，且在 $x=0$ 右邻域内无界

$$\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^q}=\begin{cases}\frac{1}{1-q}(1-\varepsilon^{1-q}) & (q\neq1)\\ -\ln\varepsilon & (q=1)\end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^q}=\begin{cases}\frac{1}{1-q}, & q<1,\\ +\infty, & q\geq1\end{cases}$$

例4. $\int_0^1\ln x\,dx=(x\ln x)\Big|_0^1-\int_0^1dx=-1$ （$x=0$ 处极限值.）

求 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

令 $a_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}}$ 则

$\ln a_n=\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln\frac{k}{n}$

$\therefore\lim_{n\to+\infty}\ln a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln\frac{k}{n}=\int_0^1\ln x\,dx=-1$

$\therefore\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$

例5. (1) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx = -\int_1^{+\infty}\arctan x\,d\left(\frac1x\right) = -\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^2+1)}dx$

$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\left(\frac1x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac\pi4+\frac12\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac\pi4+\frac12\ln2$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx = -\frac12\int_1^{+\infty}\arctan x\,d\left(\frac1{x^2}\right) = -\frac{\arctan x}{2x^2}\Big|_1^{+\infty}+\frac12\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$=\frac\pi8+\frac12\left(-\frac1x-\arctan x\right)\Big|_1^{+\infty}=\frac12$.

例6. $\int_0^{\frac\pi2}\ln\sin x\,dx$ (Euler积分)

令 $I=\int_0^{\frac\pi2}\ln\sin x\,dx$. $J=\int_0^{\frac\pi2}\ln\cos x\,dx \xlongequal{x=\frac\pi2-u}\int_0^{\frac\pi2}\ln\sin u\,du = I$.

$2I = I+J \xlongequal{凑\sin 2x}\int_0^{\frac\pi2}\ln\frac12\sin2x\,dx = \int_0^{\frac\pi2}\ln\sin2x\,dx - \frac\pi2\ln2$

$\xlongequal{2x=t}\frac12\int_0^\pi\ln\sin t\,dt-\frac\pi2\ln2 = \frac12\left(\int_0^{\frac\pi2}\ln\sin x\,dx+\int_{\frac\pi2}^{\pi}\ln\sin x\,dx\right)-\frac\pi2\ln2$

$=I-\frac\pi2\ln2$ $\therefore$ $\int_0^{\frac\pi2}\ln\sin x\,dx = -\frac\pi2\ln2$.

变式1. $\int_0^{\frac\pi2}x\cot x\,dx = \int_0^{\frac\pi2}x\,d(\ln\sin x) = (x\ln\sin x)\Big|_0^{\frac\pi2}-\int_0^{\frac\pi2}\ln\sin x\,dx = \frac\pi2\ln2$.

其中 $\lim_{x\to0^+}x\ln\sin x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac1x} = -\lim_{x\to0^+}x^2\frac{\cos x}{\sin x}=0$

变式2. $\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1-\cos x}dx \xlongequal{倍角公式} 2\int_0^\pi\frac{x\sin\frac x2\cos\frac x2}{2\sin^2\frac x2}dx \xlongequal{\frac x2=u} 4\int_0^{\frac\pi2}\frac{u\cos u}{\sin u}du = 4\cdot\frac\pi2\ln2=2\pi\ln2$

例7. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac\pi2$, 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4x}{x^2}dx$.

$I=-\int_0^{+\infty}\sin^4x\,d\left(\frac1x\right) = -\frac{\sin^4x}{x}\Big|_0^{+\infty}+4\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3x\cos x}{x}dx$

$\xlongequal{倍角公式}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos2x)\sin2x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin2x}{x}dx-\frac12\int_0^{+\infty}\frac{\sin4x}{x}dx$

$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin2x}{2x}d(2x)-\frac12\int_0^{+\infty}\frac{\sin4x}{4x}d(4x)=\frac\pi4$

例8. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$

法一. 基于积分限换元 令 $\frac1x=u$. $I=\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha du}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}$.

$2I=\int_0^{+\infty}\frac{\cancel{1+x^\alpha}}{(1+x^2)\cancel{(1+x^\alpha)}}dx = \frac\pi2 \Leftrightarrow I=\frac\pi4$

法二. 三角换元. 令 $x=\tan u$ 则 $dx=\sec^2u\,du$.

$I=\int_0^{\frac\pi2}\frac{du}{1+\tan^\alpha u}=\int_0^{\frac\pi2}\frac{\cos^\alpha u}{\cos^\alpha u+\sin^\alpha u}du \quad \int_0^{\frac\pi2}\frac{\sin^\alpha u}{\cos^\alpha u+\sin^\alpha u}du=\frac\pi4$.

特别地. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+\sqrt{x})}=\frac\pi4$

3. 无限区间上反常积分敛散性判别

定理1. Cauchy收敛准则：反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists G>a$，

当 $x', x''>G$ 时，有 $\left|\int_{x'}^{x''} f(x)dx\right|<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\left|\int_{x'}^{+\infty} f(x)dx\right|<\varepsilon$

（$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(t)dt$ 存在。

$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = \lim\limits_{A\to+\infty} f(x)dx$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$，$\exists G>a$，当 $x', x''>G$ 时，

$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$）

反常积分的条件收敛与绝对收敛：当 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛时，称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为绝对收敛。

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛而 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散，称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为条件收敛（例 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$）

由Cauchy收敛准则，易证若反常积分绝对收敛，则原反常积分必收敛。

证明：$\because \int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛 $\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists G>0$，$\forall x''>x'>G$，$\int_{x'}^{x''}|f(t)|dt<\varepsilon$

$\therefore \left|\int_{x'}^{x''} f(t)dt\right| \le \int_{x'}^{x''}|f(t)|dt<\varepsilon$.

定理2. 非负函数无穷积分的比较判别法：设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，且在任何有限区间内可积，对 $\forall x\in[a,+\infty)$，有 $f(x)\le g(x)$，则

当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

逆否 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散

证明：若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists G>a$，$\forall x''>x'>G$，$\left|\int_{x'}^{x''} g(x)dx\right|<\varepsilon$，

$\therefore \left|\int_{x'}^{x''} f(x)dx\right| = \int_{x'}^{x''} f(x)dx \le \int_{x'}^{x''} g(x)dx<\varepsilon$.

定理3. 比较判别法的极限形式 (1) 设 f，g 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，

$f(x)>0$，$g(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$，

当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c \Rightarrow \exists G>0$，$\forall x>G$，$0\le\frac{c}{2}g(x)<f(x)<\frac{3c}{2}g(x)$

(2) 设 f 在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上有定义，在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = c$.

(1) 若 $p>1$ 且 $0\le c<+\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

(2) 若 $p\le 1$ 且 $0 \le c < +\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

简证：$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = c$.

定积分第二中值定理：设 f 在 $[a,b]$ 可积

(1) 若 g 在 $[a,b]$ 上单调递减，且 $g(x)\ge 0$，则 $\exists\, \xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx$

(2) 若 g 在 $[a,b]$ 上单调递增，且 $g(x)\ge 0$，则 $\exists\, \xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$

推广：(3) 若 g 在 $[a,b]$ 上单调，则 $\exists\, \xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$

(Abel 变换)

证明：记 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $F(a)=0$，$F'(x)=f(x)$.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)d(F(x)) = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$\because g(x)$ 单调 $\therefore g'(x)$ 保号，由积分中值定理知 $\exists\,\xi\in[a,b]$ s.t.

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = [g(b)-g(a)]\int_a^{\xi} f(x)dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_a^b f(x)dx - [g(b)-g(a)]\int_a^{\xi} f(x)dx$$

$$= g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

一般无穷积分敛散性的判别

定理4. Dirichlet 判别法：设 $F(u) = \int_a^u f(x)dx$（有限区间积分）在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

证明：$\exists M>0$ $\forall u\in[a,+\infty)$，$\left|\int_a^u f(x)dx\right| \le M$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists G>0$，$\forall x>G$，$|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$

又 g 在 $[a,+\infty)$ 单调 $\therefore$ 由积分第二中值定理知，$\forall u_2>u_1>G$，$\exists\,\xi\in[u_1,u_2]$

s.t. $\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx = g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx$

$\therefore \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| \le \frac{\varepsilon}{4M}\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| + \frac{\varepsilon}{4M}\left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|$

$= \frac{\varepsilon}{4M}\left[\left|\int_a^{\xi} f(x)dx - \int_a^{u_1} f(x)dx\right| + \left|\int_a^{u_2} f(x)dx - \int_a^{\xi} f(x)dx\right|\right]$

$\le \frac{\varepsilon}{4M}\left[\left|\int_a^{\xi} f(x)dx\right| + \left|\int_a^{u_1} f(x)dx\right| + \left|\int_a^{u_2} f(x)dx\right| + \left|\int_a^{\xi} f(x)dx\right|\right] < \varepsilon$

$\therefore$ 由Cauchy收敛准则知，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理5. Abel判别法：若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

证明：法一. $\because g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界 $\therefore \exists M>0,\ \forall x\in[a,+\infty)$ 有 $|g(x)|\le M$.

$\because \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\therefore \forall \varepsilon>0,\ \exists G>0,\ \forall u_2>u_1>G,\ \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$\because g$ 单调 $\therefore$ 由积分第二中值定理知，$\forall u_2>u_1>G,\ \exists \xi\in[u_1,u_2]$

s.t. $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|$

$\le M\left(\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| + \left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|\right) < \varepsilon$

$\therefore$ 由Cauchy收敛准则知，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

法二. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$，则 $h(x)=g(x)-A$ 在 $[a,+\infty)$ 单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.

又 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\therefore F(u)=\int_a^{u} f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

由Dirichlet判别法，$\int_a^{+\infty} f(x)h(x)dx$ 收敛，$\therefore \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

例1. 判断广义积分是否收敛：(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^6}}dx$ (2) $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx$

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x \to 一阶}{\sqrt{1+x^6}\to 三阶}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot x}{\sqrt{1+x^6}}dx=1$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^6}}dx$ 收敛.

$(\forall p\in\mathbb{R})$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha}\to \alpha阶}{e^x\to \infty阶}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x}=0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha+2}e^{-x}=0$（求 x^2 前的阶数 <-1 即可）

而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛 $\quad \therefore \int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx$ 收敛

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha+2}e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=0\right.$ 与 -2 阶比较）

例2. 讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 的敛散性

记 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1 \quad \therefore x=0$ 为 $f(x)$ 可去间断点

$\because h(x)=\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上单调递减 且$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

又$\left|\int_1^u \sin x\,dx\right|=|\cos 1-\cos u|\leq 2$

由Dirichlet判别法. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 也收敛 (将$[0,1)$分离,讨论$[1,+\infty)$).

$\because \left|\frac{\sin x}{x}\right|\overset{升次}{\geq}\left|\frac{\sin^2 x}{x}\right|\overset{降次分离}{=}\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$ 而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$发散. $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$收敛

$\therefore \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散 $\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$条件收敛.

变式1. 证明:当$p>1$时. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$绝对收敛. 当$0<p\leq 1$时. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$条件收敛.

当$p>1$时 $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\leq\frac{1}{x^p}$ 而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$收敛 $\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$绝对收敛.

当$0<p\leq 1$时. $\forall u>0$. $\left|\int_1^u \sin x\,dx\right|=|\cos 1-\cos u|\leq 2$.

而$f(x)=\frac{1}{x^p}$在$[1,+\infty)$上单调递减 且$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

由Dirichlet判别法. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛.

又$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\geq\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1-\cos 2x}{2x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos 2x}{2x^p}$ 而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^p}$发散

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx$收敛. $\therefore \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx$发散 $\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$条件收敛.

变式2. 讨论$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x}dx$的敛散性.

法1. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛 $g(x)=\arctan x$在$[0,+\infty)$上单调有界

由Abel判别法. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x}dx$收敛.

法2. $\left|\int_0^u \sin x\,dx\right|\leq 2$. 而$h(x)=\frac{\arctan x}{x}$在$[0,+\infty)$内单调递减 且$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$

由Dirichlet判别法. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x}dx$收敛.

引申. 已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$.

$$I=-\int_0^{+\infty}\sin^4 x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sin^4 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+4\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x\cos x}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos 2x)\sin 2x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x}dx=\frac{\pi}{4}$$

推广:计算$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^k x}{x^k}dx$的值 $(k=2,3,4)$

(1) $I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = -\int_0^{+\infty}\sin^2x\, d\left(\frac1x\right) = -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

(2) 法一 $I_3=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3x}{x^3}dx=-\frac12\int_0^{+\infty}\sin^3x\,d\left(\frac1{x^2}\right) = -\frac{\sin^3 x}{2x^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac32\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x\cos x}{x^2}dx$

$=-\frac32\int_0^{+\infty}\sin^2x\cos x\, d\left(\frac1x\right) = -\frac{3\sin^2x\cos x}{2x}\Big|_0^{+\infty}+\frac32\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos^2x-\sin^3x}{x}dx$ (*)

$=\frac32\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x(1-\sin^2x)-\sin^3x}{x}dx=\frac32\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x-3\sin^3x}{x}dx$

$\xrightarrow{\text{降次}}\frac32\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x-\frac34(3\sin x-\sin 3x)}{x}dx=\frac32\times\left(\frac34\times\frac\pi2-\frac14\times\frac\pi2\right)=\frac38\pi.$

法二 (*) $=\frac34\int_0^{+\infty}\frac{\sin x(1+3\cos 2x)}{x}dx \overset{积化和差}{=} \frac38\pi+\frac98\int_0^{+\infty}\frac{\sin3x-\sin x}{x}dx=\frac38\pi.$

(3) $I_4=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4x}{x^4}dx=-\frac{\sin^4x}{3x^3}\Big|_0^{+\infty}+\frac43\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3x\cos x}{x^3}dx$

$=-\frac23\int_0^{+\infty}\sin^3x\cos x\, d\left(\frac1{x^2}\right)$

$=-\frac{2\sin^3x\cos x}{3x^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac23\int_0^{+\infty}\frac{3\sin^2x\cos^2x-\sin^4x}{x^2}dx$

$=\frac23\int_0^{+\infty}\frac{3\sin^2x-4\sin^4x}{x^2}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx-\frac83\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4x}{x^2}dx$

$=2\cdot\frac\pi2-\frac83\cdot\frac\pi4=\frac\pi3$　　(凑微分与(1)形式一致)

例3 证明反常积分条件收敛: (1) $\int_1^{+\infty}\sin(x^2)dx$　(2) $\int_1^{+\infty}x\sin(x^4)dx$

证明: (1) 令 $x^2=t$, 则 $dx=\frac{dt}{2\sqrt t}$ ∴ $\int_1^{+\infty}\sin(x^2)dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt t}dt$ 由例1.(2)知, 条件收敛.

(2) $\int_1^{+\infty}x\sin(x^4)dx \overset{x^2=t}{=} \frac12\int_1^{+\infty}\sin(t^2)dt$ 条件收敛.

推广: $\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx$ 收敛.

注: $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 但 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 不一定趋于0. (不是收敛的本质)

直观解释: 定积分是二维面积. $f(\xi_i)=n$, $\Delta x=\frac1{n^3}$ 时 $f(\xi_i)\Delta x=\frac1{n^2}$.

求和后依旧收敛.

例如 对 $f(x)=x\sin(x^4)$, 取 $x_n=\sqrt[4]{2n\pi+\frac\pi2}$, $f(x_n)=\sqrt[4]{2n\pi+\frac\pi2}\to+\infty$.

∴ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时 不能得到 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. 且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无界.

例4 证明: 设 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛. 若 (1) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续 / (2) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在 /

(3) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调. 则 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明：(1) 反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$. 则 $\exists\,\varepsilon_0>0$. $\forall G>0$. $\exists x_0>G$ s.t. $|f(x_0)|>2\varepsilon_0$.

又 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续 $\therefore \forall\varepsilon_0>0.\ \exists\delta_0>0.\ \forall|x'-x''|<2\delta_0.\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0$

特别地, 当 $|x-x_0|<2\delta_0$ 时. $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0$.

当 $f(x_0)>2\varepsilon_0$ 时. $f(x)-f(x_0)\geq -|f(x)-f(x_0)|$ ⇒ $f(x)\geq f(x_0)-|f(x)-f(x_0)|>\varepsilon_0$

$\therefore \left|\int_{x_0}^{x_0+\delta_0} f(t)\,dt\right| \geq \varepsilon_0\delta_0$. 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾.

当 $f(x_0)<-2\varepsilon_0$ 时. $f(x)\leq f(x_0)+|f(x)-f(x_0)|<-\varepsilon_0$

$\therefore \left|\int_{x_0}^{x_0+\delta_0} f(t)\,dt\right| \geq \varepsilon_0\delta_0$. 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾.

(2) 反证法. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\neq 0$. 不妨设 $A>0$. 则 $\exists G>0$. $\forall x>G$. $f(x)>\frac{A}{2}$.

取 $\varepsilon_0=\frac{A}{2}$. $\forall X(>G)>0$. $\exists x_0>X$. s.t. $\int_{x_0}^{x_0+2} f(x)\,dx>A>\frac{A}{2}=\varepsilon_0$.

$\therefore$ 由Cauchy收敛准则知 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散. 矛盾 $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(3) 不妨设 $f(x)$ 单调递增.

若 $f(x)$ 无界. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散. 不合.

若 $f(x)$ 有上界. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 由(2)知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

例5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可微. $f(x)$ 单调递增且无上界. 证明: $\int_0^{+\infty}\cos f(x)\,dx$ 收敛.

解: $\cos$ 不好处理: 令 $y=f(x)$. 反函数变换.

$\because f(x)$ 单调递增无界 $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. $\therefore \exists a>1.\ \forall x>a.\ f(x)>1$ $\therefore f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内单调递增

$\left(\int_0^{+\infty}\cos f(x)\,dx=\int_0^{a}\cos f(x)\,dx\ (\text{常数})+\int_a^{+\infty}\cos f(x)\,dx\ (\text{Y})\right)$

$\because y=f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内有反函数 $x=g(y)$.

$\therefore \int_a^{+\infty}\cos f(x)\,dx=\int_{f(a)}^{+\infty}\cos y\, g'(y)\,dy$

$\forall\alpha>f(a)$. $\left|\int_{f(a)}^{\alpha}\cos y\,dy\right|=|\sin\alpha-\sin f(a)|\leq 2$

又 $g'(y)=\frac{1}{f'(y)}$ 单调递减趋于0.

由Dirichlet判别法知 $\int_{f(a)}^{+\infty}\cos y\, g'(y)\,dy$ 收敛 $\therefore \int_0^{+\infty}\cos f(x)\,dx$ 收敛

4. 瑕积分敛散性的判别

定理1. 柯西收敛准则：瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$（瑕点为 a）收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x_1, x_2 \in (a, a+\delta)$，$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

瑕积分的绝对收敛与条件收敛：设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义且在 $x=a$ 的任一右邻域内无界，在任何内闭区间 $[a+\varepsilon, b]$ $(\varepsilon>0)$ 上有界且可积，当 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛时，称 $\int_a^b f(x)dx$ 为绝对收敛；若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，而 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散，称 $\int_a^b f(x)dx$ 为条件收敛.

定理2. 比较判别法：设 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $(a,b]$ 上的函数，瑕点均为 a，且在 $\forall [u,b] \subset (a,b]$（内闭区间）上可积，$0 \le f(x) \le g(x)$

(1) 当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

(2) 当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散时，$\int_a^b g(x)dx$ 也发散

定理3. 比较判别法的极限形式：设 $f(x)$ 是定义在 $(a,b]$ 上的函数，瑕点为 a，在 $\forall [u,b] \subset (a,b]$ 上可积且有 $\lim\limits_{x\to a+0}(x-a)^q f(x) = c$.

(1) 若 $q<1$ 且 $0 \le c < +\infty$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(2) 若 $q \ge 1$ 且 $0 < c \le +\infty$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

定理4. Dirichlet 判别法：设 a 为 $f(x)$ 的瑕点，$F(u) = \int_u^b f(x)dx$ 在 $(a,b]$ 上有界，$g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$. 则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理5. Abel 判别法：设 a 为 $f(x)$ 的瑕点，瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调有界.
则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

例. 判断下列积分的敛散性 (1) $\int_0^1 x^p \ln x\, dx$ (2) $\int_0^1 \frac{x}{|\ln x|^p} dx$.

(1) 当 $p>0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0+0} x^p \ln x = 0$. 原积分为 Riemann 积分.

当 $p=0$ 时 由 $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = 0$（阶数 >-1 即可）$\therefore \int_0^1 \ln x\, dx$ 收敛 且 $\int_0^1 \ln x\, dx = -1$

观察知 $p=-1$ 时 凑微得 $\int_0^1 \ln x\, d(\ln x)$ 发散. $\therefore -1<p<0$ 作分界点

当 $-1<p<0$ 时 记 $p=-1+2\alpha$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$

$\because \lim_{x\to 0+0} x^{1-\alpha}(x^p \ln x) = \lim_{x\to 0+0} x^{\alpha}\ln x = 0$ (阶数 >-1). $\therefore \int_0^1 x^p \ln x\,dx$ 收敛

(思路: 利用 $\lim_{x\to 0+0} x^{\alpha}\ln x = 0$ 说明 $x^p\ln x$ 阶数 >-1.

$\lim_{x\to 0+0}(x^{\alpha-p})(x^p\ln x) = 0$ $\therefore \alpha-p<1 \Rightarrow p>-1+\alpha$. 取 $p=-1+2\alpha$).

当 $p=-1$ 时 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_\varepsilon^1 = -\infty$.

当 $p<-1$ 时 记 $p=-1-2\alpha$ $(\alpha>0)$.

$\because \lim_{x\to 0+0} x^{1+\alpha}(x^p\ln x) = +\infty$. 而 $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$ 发散 $\therefore \int_0^1 x^p \ln x\,dx$ 发散.

$\therefore$ 综上 当 $p>-1$ 时 原积分收敛. 当 $p\le -1$ 时 原积分发散

(2) 此时 $\ln x<0$. 化为 $\ln$ 前负号证.

令 $\ln\frac{1}{x}=u$. 则 $x=e^{-u}$. $dx=-e^{-u}du$.

$\int_0^1 \frac{x}{|\ln x|^p}dx = \int_0^{+\infty} u^{-p}e^{-2u}du = \underbrace{\int_0^1 u^{-p}e^{-2u}du}_{\text{瑕}} + \underbrace{\int_1^{+\infty}u^{-p}e^{-2u}du}_{\text{穷}} \triangleq I_1+I_2$

对于 $I_1=\int_0^1 u^{-p}e^{-2u}du$.

当 $p<1$ 时 记 $p=1-2\alpha$ $(\alpha>0)$. $\lim_{u\to 0+0}u^{1-\alpha}u^{-p}e^{-2u} = \lim_{u\to 0+0}u^{\alpha}e^{-u}=0$

而 $\int_0^1 \frac{du}{u^{1-\alpha}}$ 收敛 $\therefore I_1$ 收敛.

当 $p=1$ 时 $\lim_{u\to 0+0}u(u^{-p}e^{-u})=1$ 当 $p>1$ 时 $\lim_{u\to 0+0}u^p(u^{-p}e^{-u})=1$

$\therefore$ 当 $p\ge 1$ 时 瑕积分 I_1 发散.

对于 $I_2=\int_1^{+\infty}u^{-p}e^{-2u}du$. $\forall p\in\mathbb{R}$ 均收敛.

$\therefore$ 当 $p<1$ 时 $\int_0^1 \frac{x^p}{|\ln x|}dx$ 收敛. 当 $p\ge 1$ 时 原积分发散.

5. 反常积分杂题 例1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^4 x\,dx}{1+\tan^4 x} \xlongequal{\tan x=u} \int_0^{+\infty}\frac{1+u^2}{1+u^4}du = \int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^2}+u^2}du$

$= \int_0^{+\infty}\frac{d(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

变式: $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$. 令 $x=\frac{1}{u}$. $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

$\therefore 2I = \int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx \Rightarrow I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

另解：$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{1+x^4}dx$

例2. (1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cot^3 x}dx$.

令 $\frac{1}{x}=u$. $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha dx}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}$

$2I_1=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I_1=\frac{\pi}{4}$

(2) 令 $\cot x=u$. 则 $x=\operatorname{arccot}u$. $dx=-\frac{1}{1+u^2}du$

$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)(1+u^3)}=\frac{\pi}{4}$.

另解：令 $x=\frac{\pi}{2}-u$.

例3. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$

令 $x=\frac{1}{u}$. $I=\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+u^3}du$.

$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^3}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x+x^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2x-1)^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

例4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\,dx$.

令 $\sqrt{\tan x}=u$. $x=\arctan u^2$. $dx=\frac{2u}{1+u^4}du$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\,dx=2\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

例5. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}$

$I\xlongequal{x=\frac{1}{u}}\int_0^{+\infty}\frac{u^4}{1+u^6}du$.

$2I=\int_0^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\overbrace{(x^4-x^2+1)+x^2}^{凑分母}}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx$

$=\arctan x\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{3}\arctan(x^3)\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore I=\frac{\pi}{3}$

例6. 讨论 $\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 的敛散性.

$\varphi(\alpha)=\underbrace{\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx}_{瑕积}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx}_{反常}\triangleq I_1+I_2$

当 $\alpha>0$ 时 $I_1=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 收敛. 当 $\alpha\leq 0$ 时 I_1 发散.

当 $\alpha<1$ 时 $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 收敛. 当 $\alpha\geq 1$ 时 I_2 发散.

$\therefore \alpha \in (0,1)$时 $\varphi(\alpha)$收敛，$\alpha \in (-\infty,0] \cup [1,+\infty)$时 $\varphi(\alpha)$发散

例7. 设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$，问$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$是否一定收敛。

不定，向$g(x)$引入奇异点：取$g(x)=1+\frac{2a}{x-2a}(a>0)$，$f(x)=\frac{1}{x^2}$

则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

而$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x(x-2a)}dx=\int_a^{2a}\frac{1}{x(x-2a)}dx+\int_{2a}^{+\infty}\frac{1}{x(x-2a)}dx$

$x=2a$为$h(x)=\frac{1}{x(x-2a)}$奇异点，$\int_a^{2a}\frac{1}{x(x-2a)}dx$发散

同样$\int_{2a}^{+\infty}\frac{1}{x(x-2a)}dx$也发散，$\therefore \int_a^{+\infty}\frac{1}{x(x-2a)}dx$发散

例8. 计算$\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$ $(n\in N)$（Dirichlet积分）

法一：记$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$，则$I_0=\pi$.

当$n\geq1$时 $I_n-I_{n-1}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{2\cos 2nx\sin x}{\sin x}dx=0$.

$\therefore I_n=I_{n-1}=\cdots=I_1=I_0=\pi$

法二：Dirichlet和：记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2kx$，当$x\in(0,\pi)$时

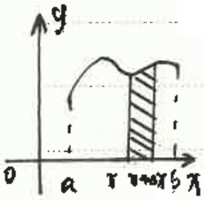
$S_n \xlongequal[\text{积化和差裂项}]{\text{上下同乘}\sin x\text{项}} \frac{1}{2\sin x}\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin x\cos 2kx=\frac{1}{2\sin x}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sin(2k+1)x-\sin(2k-1)x)$

$=\frac{\sin(2n+1)x-\sin x}{2\sin x}$ $\therefore \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=2S_n+1$

$\therefore \int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}(2S_n+1)dx=\pi$

§4 定积分在几何计算中的应用

1. 微元分析法：若所求量（几何或物理量等）Q依赖于定义在区间$[a,b]$上的函数$f(x)$，且目标量$Q=Q(x)$具有代数可加性.



(1) 当$f(x)$为常数C时，有$Q=C(b-a)$.

(2) 当$f(x)$不是常数时，$\forall x\in[a,b]$ 给自变量x一个增量Δx，所求量Q得到增量ΔQ，由于x的变动Δx很小，$f(x)$可近似看作不变，∴有$\Delta Q\approx f(x)\Delta x$，当$f(x)$满足一定条件时有 $\Delta Q=f(x)\Delta x+o(\Delta x)$，即$dQ=f(x)dx$ 称dQ为所求量Q的微元.

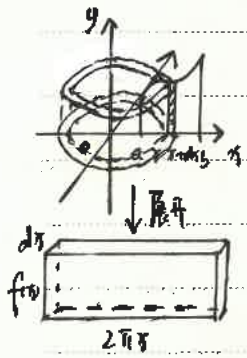
所求的目标量 $Q=\int_a^b f(x)dx$.

微分

归纳：(1) 面积 $S=S(x)$，$dS=f(x)dx$　$S=\int_a^b dS=\int_a^b f(x)dx$

(2) 绕x轴旋转体体积 $V_x=V(x)$，$dV_x=\pi[f(x)]^2dx$

$V_x=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$



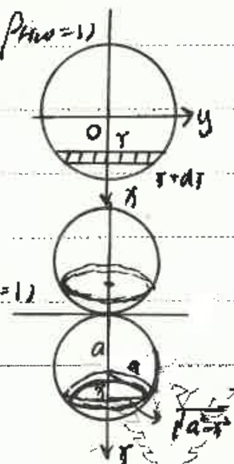
(3) 绕y轴旋转体体积 $V_y=V_y(x)$

柱壳法：$dV_y=2\pi x f(x)dx$　$(2\pi|x||y|dx)$

$V_y=2\pi\int_a^b x f(x)dx$

2. 定积分在物理上的应用

例1. 有一半径为R的圆形闸门，试问当水面齐闸门圆心时，闸门单侧所受的压力 ($\rho_{H_2O}=1$)



以圆心为原点，以与水平面上闸门直径轴建系如图.

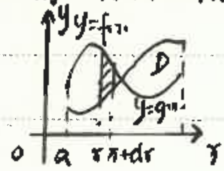
$x^2+y^2=R^2$

$F=pS \Rightarrow dF=pdS=2\rho gx\sqrt{R^2-x^2}dx \Rightarrow F=2\rho g\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx = \frac{2}{3}\rho gR^3$

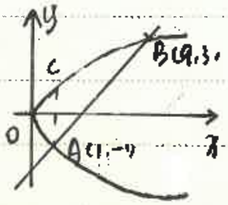
例2. 将半径为a的球体从水面下方相切处提至上方相切处，求所作的功 ($\rho_{H_2O}=1$)

$dW=(a+x)\pi(a^2-x^2)(\rho-1)gdx+(a-x)\pi(a^2-x^2)\rho gdx$

3. 直角坐标系下平面图形的面积：设平面区域D由区间在$[a,b]$上连续曲线$y=f(x)$, $y=g(x)$与直线$x=a$, $x=b$所围成. $\forall x\in[a,b]$，$[x,x+dx]$所对应的几何图形的面积$dS=|f(x)-g(x)|dx$



$\therefore S_D=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

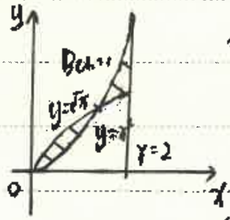


例1. 计算 $y^2=x$, $x-2y-3=0$ 所围成平面图形的面积.

交点 $A(1,-1)$ $B(9,3)$

法一：选x为积分变元 $S=2\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\int_1^9\left(\sqrt{x}-\frac{x-3}{2}\right)dx=\frac{32}{3}$

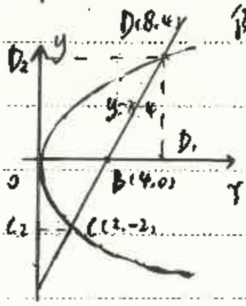
法二：选y为积分变元 $S=\int_{-1}^3[(2y+3)-y^2]\,dy=\frac{32}{3}$



例2. 计算 $y=x^2$, $y^2=x$, $x=2$ 所围平面图形的面积.

交点 $O(0,0)$ $B(1,1)$.

$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx+\int_1^2(x^2-\sqrt{x})dx=\frac{10-4\sqrt{2}}{3}$



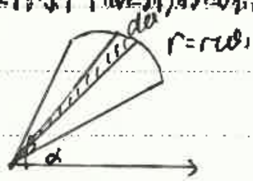
例3. 计算 $y^2=2x$, $y=x-4$ 所围平面图形的面积.

交点 $C(2,-2)$, $D(8,4)$

法一：以x为积分变元. $S=2\int_0^2\sqrt{2x}\,dx+\int_2^8[\sqrt{2x}-(x-4)]\,dx=18$.

法二：以y为积分变元 $S=\int_{-2}^4\left[(y+4)-\frac{1}{2}y^2\right]dy=18$

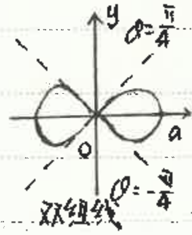
4. 极坐标系下平面图形的面积：若曲线由极坐标方程 $C: r=r(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$ 给出，其中$r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且$\beta-\alpha\le2\pi$. 由曲线C与射线$\theta=\alpha$, $\theta=\beta$所围平面区域的面积 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$



$dS=\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$

例. 计算 $C: (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围平面图形的面积 $(a>0)$

$\because$曲线关于x, y轴对称. 曲线所围图形面积是位于第一象限部分的4倍.



曲线极坐标方程为 $r^2=a^2\cos2\theta$.

在第一象限，$\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ r^2=a^2\cos2\theta\ge0\end{cases}\Rightarrow\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$.

$\therefore S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2(\theta)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta d\theta=a^2$

求平面区域面积的步骤：(1)画出区域D的草图，求交点确定积分限

直角坐标、极坐标

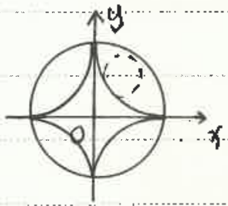
(2)选适当的积分变元(x或y)，列出定积分表达式(选择适当的坐标系)

(3)计算定积分

5.参数方程表示的平面图形面积：若曲线C以参数方程形式给出，$C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}(\alpha\le t\le\beta)$，其中$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，$x(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续导数，且$x'(t)\ne0$.

记$a=x(\alpha)$，$b=x(\beta)$ ($a<b$或$a>b$)，则曲线C与$x=a$，$x=b$所围平面图形面积 $S=\int_\alpha^\beta|y(t)x'(t)|dt$.

例：求星形线(内摆线) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$所围平面图形的面积.



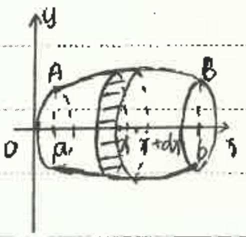
由对称性知，星形线所围区域的面积为第一象限部分面积的4倍。参数方程为

$\begin{cases}x=a\cos^3t\\y=a\sin^3t\end{cases}(0\le t<2\pi)$

$\therefore S=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\cdot3\cos^2t\sin t\,dt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)dt$

$=12a^2(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{3}{8}\pi a^2$

6.已知截面面积求体积：设Ω为三维空间中的立体，夹在垂直于x轴的两平面$x=a$，$x=b$ ($a<b$)之间，对$\forall x\in[a,b]$，



在x轴上的点x处作垂直于x轴的平面Σ，记平面Σ截立体Ω所得截面面积为$A(x)$，给x一个增量dx，过点$x+dx$作与x轴垂直的平面Σ'，则立体Ω位于两平面Σ、Σ'之间的体积 $dV=A(x)dx$　　祖暅原理："幂势既同，则积不容异"

$\therefore$立体Ω的体积 $V=\int_a^bA(x)dx$.

例. 求椭球体 Ω: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 ($a,b,c>0$ 且为常数)

过z轴上任意一点 $M(0,0,z)$ $(-c\le z\le c)$ 作与z轴垂直的平面.

截椭球体 Ω 所得截面为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$, 为椭圆, 其面积为

$S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$ $(-c\le z\le c)$

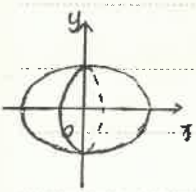
$\therefore V=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{3}\pi abc$

7. 旋转体的体积. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 曲线 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ 和x轴围成曲边梯形D, 分别绕x轴, y轴旋转一周得立体 Ω_x, Ω_y.

(1) 立体 Ω_x 截面面积 $A(x)=\pi f^2(x)$ $\therefore$ 体积 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

(2) 对立体 Ω_y, 给x一个增量dx, 则介于x与x+dx之间的小曲边梯形绕y轴旋转一周所得旋转体体积为 $dV_y=2\pi|x\,f(x)|dx$ $\therefore V_y=2\pi\int_a^b|x\,f(x)|dx$ (套筒法)

例. 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的面积及椭圆绕x轴旋转一周所得旋转体体积.



上半椭圆方程: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

由对称性知, 椭圆面积为椭圆在第一象限部分面积的4倍.

$S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{4b}{a}\times\frac{\pi}{4}a^2=\pi ab$

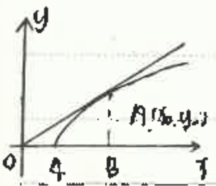
$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi ab^2$

例. 从原点引曲线 $C: y=\sqrt{x-4}$ 的切线 l, 计算

(1) 曲线C, 切线 l 与x轴所围平面图形D的面积

(2) 区域D绕x轴, y轴及直线 $x=8$ 旋转一周所得立体体积.

(3) 区域D绕x轴旋转一周所得立体的表面积



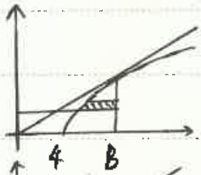
(1) 设切点 $A(x_0,y_0)$, $l: y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0-4}}(x-x_0)$ 又 l 过原点. $\therefore$ 切点 $A(8,2)$.

l 方程 $y=\frac{1}{4}x$. $S=\frac{1}{2}\times8\times2-\int_4^8\sqrt{x-4}\,dx=8-\frac{2}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\Big|_4^8=\frac{8}{3}$

$S=\int_0^2[(y^2+4)-4y]dy=\frac{8}{3}$

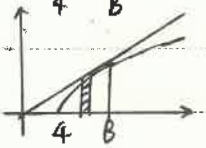
(2) 补: $V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 8 - \pi\int_4^8 (\sqrt{x-4})^2 dx = \frac{8}{3}\pi$

割: $V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 4 + \pi\int_4^8 \left(\frac{x^2}{16} - (\sqrt{x-4})^2\right) dx = \frac{8}{3}\pi$



$V_y = 2\pi\int_0^8 x \cdot \frac{x}{4} dx - 2\pi\int_4^8 x\sqrt{x-4}\, dx = \frac{256}{15}\pi$ (x方向)

$V_y = \pi\int_0^2 (y^2+4)^2 dy - \frac{1}{3}\pi \times 8^2 \times 2 = \frac{256}{15}\pi$ (y方向)



$V_{x=8} = \frac{1}{3}\pi \times 2 \times 8^2 - \pi\int_0^2 [8-(y^2+4)]^2 dy = \frac{128}{5}\pi$

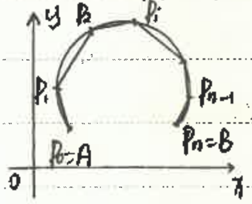
$V_{x=8} = \frac{1}{3}\pi \times 2 \times 8^2 - 2\pi\int_4^8 (8-x)\sqrt{x-4}\, dx = \frac{128}{5}\pi$

(3) 圆锥表面积 $S_1 = 2\pi\int_0^8 \frac{1}{4}x\sqrt{1+\frac{1}{16}}\, dx = 4\sqrt{17}\pi$

抛物线旋转面面积 $S_2 = 2\pi\int_4^8 \sqrt{x-4}\sqrt{1+\frac{1}{4(x-4)}}\, dx = \frac{17\sqrt{17}-1}{6}\pi$

$\therefore S = S_1 + S_2 = \frac{41\sqrt{17}-1}{6}\pi$

8. 平面曲线弧长的定义: 在平面曲线 $C=\overset{\frown}{AB}$ 上从 A 到 B 依次取分点 $T: A=P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}, P_n=B$, 它们构成曲线 C 的一个分割 T. 用线段连接 T 中相邻的两个点, 得到弦 $\overline{P_{i-1}P_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 这 n 条线段构成曲线 C 的内接折线. 记 $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n} |\overline{P_{i-1}P_i}|$; 曲线 C 的所有内接折线长 $s_T = \sum\limits_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}|$.



曲线长度的定义: 对曲线 C 的任意分割 T, 若存在有限极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0} s_T = \lim\limits_{\|T\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| = s\ (0<s<+\infty)$

则称 C 是可求长度的, s 称为曲线的长度.

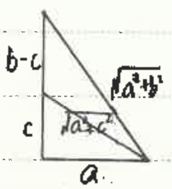
光滑曲线弧长公式: 设 $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 是一条没有自交点的非闭的平面曲线. 若 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微, 则曲线 C 是可求长的, 且其弧长为 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\, dt$.

证明: 将曲线 C 分割成 n 小段, 其分点依次为 $T: A=P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n=B$, 点 P_0, P_n 对应 α, β, 且 $P_i(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$. 这样, 得到区间 $[\alpha,\beta]$ 的分割

$T': \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$. 可用反证法证明 $\|T\| \to 0$ 时 $\|T'\| \to 0$.

对 T' 所属的每个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上用 Lagrange 中值定理知, $\exists\, \xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$

s.t. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i$



$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = y'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i$

从而曲线 C 内折线长度 $S_T = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\,\Delta t_i$

$\because \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，从而可积

$\therefore$ 只需证 $\lim\limits_{\|T\|\to 0} S_T = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i$

记 $\sigma_i = \sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2} - \sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}$ $\overset{\text{误差估计}}{\leq} |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)|$（三角不等式）

$\because y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续，从而一致连续 $\therefore \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $\|T\|<\delta$ 时，

只要 $\xi_i, \eta_i \in \Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$，就有 $\sigma_i \leq |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$

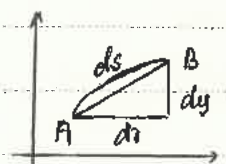
$\therefore \sum_{i=1}^{n}\sigma_i\Delta t_i < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i = \varepsilon$

又 $S_T = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i\Delta t_i$

$\therefore S = \lim\limits_{\|T\|\to 0} S_T = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i = \int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

平面光滑曲线的弧长公式：若曲线 C 由参数方程 $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ 给出，且对 $\forall t \in [\alpha,\beta]$，$x'(t), y'(t)$ 不同时为零时称曲线 C 为光滑曲线，光滑或分段光滑曲线的弧长

$S = \int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$.



弧三角

(1) 若 C 由直角坐标方程 $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ 表示，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，则曲线 C

弧长为 $S = \int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

(2) 若 C 由极坐标方程 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 表示，且 $r(\theta)$ 有连续导数，则曲线 C

$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$

弧长为 $S = \int_\alpha^\beta\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}\,d\theta$

例1. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 一拱的弧长.

$\because x'(t) = a(1-\cos t), y'(t) = a\sin t$，则

$S = \int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a$

例2. 求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 的周长.

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\,d\theta=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=8a$$

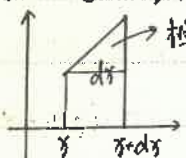
例3. $C: y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt\ (0\le x\le\pi)$，求 C 的弧长.

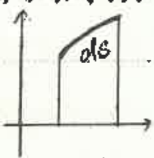
$$ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\sin x}\,dx=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$S=\int ds=\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx=2\left(-\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=4.$$

9. 旋转体的侧面积：设平面光滑曲线 $C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 绕 x 轴旋转一周所得曲面为 Σ. 任取 $t\in[\alpha,\beta]$ 对应曲线 C 上点 P，给 t 一个增量 Δt，对应曲线 C 上点 Q，则 PQ 长度为 $ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$.

弧 PQ 绕 x 轴旋转一周所得曲面的侧面积 $dS=2\pi|y(t)|ds=2\pi|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$





$$dS=2\pi f(x)\,ds=2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

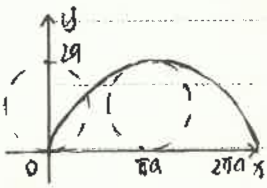
$$S_{侧}=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

∴ 平面光滑曲线 $C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面侧面积

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

如果 $C: y=f(x)\ (a\le x\le b)$，且 $f(x)$ 有一阶连续导数，则 C 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面侧面积 $S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.

例1. 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$ 一拱绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的侧面积.



$x'(t)=a(1-\cos t)$　$y'(t)=a\sin t$ 则

$$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt$$

$$S=2\pi\int|y(t)|ds=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt\ \overset{\frac{t}{2}=u}{=\!=}\ 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3u\,du=32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3u\,du=\frac{64\pi}{3}a^2$$

引申. (1) 求一拱与 x 轴围成区域 D 的面积. (2) 求 D 绕 x 轴、y 轴所得立体的体积与绕 y 轴旋转一周的表面积.

$$(1)\ S=\left|\int_0^{2\pi a}y\,dx\right|=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,|(a(t-\sin t))'|\,dt=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} 4\sin^4\frac{t}{2}dt \xlongequal{\frac{t}{2}=u} 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\,du = 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,du = 3\pi a^2$$

(2) $V_x = \left|\pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx\right| = \pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3\int_0^{2\pi} 8\sin^6\frac{t}{2}dt = 5\pi^2 a^3$

$S_x = 2\pi\int_0^{2\pi}|y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt = \frac{64}{3}\pi a^2$

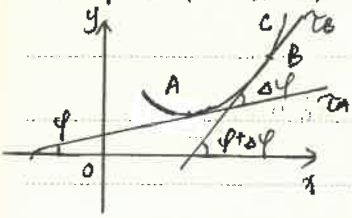
$V_y = \left|2\pi\int_0^{2\pi a} xy\,dx\right| = 2\pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^2(t-\sin t)dt$

$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t)dt = 6\pi^3 a^3$

$S_y = 2\pi\int_0^{2\pi}|x(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt$

$\xlongequal{\frac{t}{2}=u} 16\pi a^2\int_0^{\pi}(u-\sin u\cos u)\sin u\,du = 16\pi^2 a^2$

10. 曲率：曲线 C 上弧 $\overset{\frown}{AB}$ 弧长为 Δs，当动点从 A 沿 $\overset{\frown}{AB}$ 运动到 B 时，A 处切线 τ_A 也随之运动到 B 处切线



τ_B，记两条切线之间夹角为 $\Delta\varphi$（$\Delta\varphi$ 为 τ_B 和 x 轴正向夹角与 τ_A 和 x 轴正向的夹角之差），定义 $\bar{K} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均曲率。

定义：$K = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$ 为曲线 C 在 A 处的曲率

设光滑曲线 $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$，且 $x(t), y(t)$ 有二阶连续导数，则曲线上对应参数 t 的任何点处切线斜率 $k = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

若该切线与 x 轴正向夹角为 $\varphi\ (0\le\varphi<\pi)$ 则 $\tan\varphi = \frac{y'(t)}{x'(t)}\quad (x'(t)\ne 0)$

$\therefore \varphi = \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}$ 或 $\varphi = \pi + \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\cdot\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2} = \frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\quad \therefore K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{([x'(t)]^2+[y'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}}$$

若 $C: y = f(x)\ (a\le x\le b)$，且 f 有二阶连续导数，则 $K = \frac{|y''|}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}$

例. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\ (a>b>0)$ 上曲率最大和最小的点。

解 椭圆参数方程 $C: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$. $x'(t) = -a\sin t$, $x''(t) = -a\cos t$

$y'(t) = b\cos t$, $y''(t) = -b\sin t$

$\therefore K=\dfrac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|ab\sin^2t+ab\cos^2t|}{[a^2\sin^2t+b^2\cos^2t]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{ab}{[b^2+(a^2-b^2)\sin^2t]^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore t=0$ 或 π 时 $K_{max}=\dfrac{a}{b^2}$ 当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}\pi$ 时 $K_{min}=\dfrac{b}{a^2}$

$\therefore$ 曲率最小点 $(0,\pm b)$ 曲率最大点 $(\pm a,0)$.

当 $a=b=r>0$ 时 ⊙ $x^2+y^2=r^2$ 曲率 $K=\dfrac{1}{r}$.

例. 设 $y=y(x)$ 由 $e^{-y}+x(y-x)=1+x$ 确定 求 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处曲率.

解 当 $x=0$ 时 $y=0$. $-e^{-y}y'+(y-x)+x(y'-1)=1$ $\therefore y'(0)=-1$

$e^{-y}(y')^2-e^{-y}y''+2(y'-1)+xy''=0$ $\therefore y''(0)=-3$

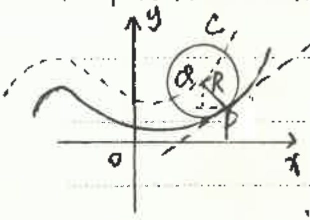
$y=y(x)$ 在 $x=0$ 处曲率 $\rho=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

例. 求 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 上曲率最大的点的坐标.

$\because y'=2ax+b$ $y''=2a$ $K=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2|a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}\leq2|a|$

当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时 $K_{max}=2|a|$ 即抛物线在顶点处弯曲程度最大

1. 曲率圆与渐屈线: 设曲线在P处曲率 $K\neq0$ 在P处的法线上作半径 $r=\dfrac{1}{K}$ 的⊙ 使得该⊙与P附近的曲线



在切线的同侧(同凹向) 称此⊙为曲线在P处的曲率圆(密切圆).

曲率圆半径 $r=\dfrac{1}{K}$ 称为曲率半径 曲率圆圆心称为曲率中心. 曲率⊙对应曲线在P处

函数值 一阶导与二阶导均相等.

设曲率圆的圆心为 (ξ,η) 曲线C方程为 $y=f(x)$ 则

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{f'(x)[1+(f'(x))^2]}{f''(x)}\\ \eta=y+\dfrac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}\end{cases}$$

由曲率圆圆心组成的曲线Γ称原曲线C的渐屈线. 曲线C称渐屈线Γ的渐伸线.

曲线的渐屈线方程: 设 $P(x,y)$ 处切线倾斜角为 α 曲率⊙半径为 r. 则 $\tan\alpha=y'$ 圆心 $Q(\xi,\eta)$

参数方程形式 $$\begin{cases}\xi=x-r\sin\alpha=x-\dfrac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}\dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=x-\dfrac{y'[1+(y')^2]}{y''}\\ \eta=y+r\cos\alpha=y+\dfrac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}\dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}=y+\dfrac{1+(y')^2}{y''}\end{cases}$$

例 求 $y=e^x$ 上曲率最大点的坐标与最大曲率.

$y'=e^x$, $y''=e^x$. 则 $P(x,y)$ 处曲率 $K(x)=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^x}{[1+e^{2x}]^{\frac{3}{2}}}$ $(x\in\mathbb{R})$

考虑 $g(u)=\frac{u}{(1+u)^3}$ $(u>0)$, 则 $g'(u)=\frac{(1+u)^3-3u(1+u)^2}{(1+u)^6}=\frac{1-2a}{(1+u)^4}$

∴ 当 $0<u<\frac{1}{2}$ 时 $g(u)\nearrow$, 当 $u>\frac{1}{2}$ 时 $g(u)\searrow$

∴ $u=\frac{1}{2}$ 时 $g_{max}(\frac{1}{2})=\frac{4}{27}$. ∴ 当 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$ 时, $K(x)_{max}$ 且 $K_{max}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

∴ 曲率最大值点 $(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

§1. 定积分的可积条件

1. 可积的必要条件：若 f 在 $[a,b]$ 可积，则 f 在 $[a,b]$ 上必有界

证明：反证法. 若 f 在 $[a,b]$ 上无界，则对 f 的任一个分割 T，必存在属于 T 的某个区间

$\Delta_k=[x_{k-1},x_k]$ s.t. f 在 Δ_k 上无界

$\forall \xi_i\in\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n,\ i\neq k)$ 记 $G=\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$

$\forall M>0$ ∵ f 在 Δ_k 无界 ∴ $\exists \xi_k\in\Delta_k$ s.t. $|f(\xi_k)|>\frac{M+G}{\Delta x_k}$

∴ $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \geq |f(\xi_k)\Delta x_k| - \left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| > \frac{M+G}{\Delta x_k}\cdot\Delta x_k - G = M$

∴ 对 $\forall$ 分割 T，按上述方法选取点集 $\{\xi_i\}$ 总能使 Riemann 和无界，与可积矛盾

2. 可积的充要条件：达布上和与下和：设 $T=\{\Delta_i \mid \Delta_i=[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\cdots,n\}$ 是区间 $[a,b]$ 的任一分割

由于 f 在 $[a,b]$ 上有界，从而 f 在 Δ_i 上存在上下确界，记

$M_i=\sup_{x\in\Delta_i} f(x)$, $m_i=\inf_{x\in\Delta_i} f(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$

作和 $S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ $s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$

分别称上面的和式为 Darboux 上和（大和）与 Darboux 下和（小和）

由此可知 达布上和与下和仅与 f 及区间分割 T 有关，而与取点集 $\{\xi_i\}$ 无关.

对 $\forall \xi_i\in\Delta_i$，均有 $s(T)\leq\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\leq S(T)$

达布上下和的性质：记 $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$

则 $m(b-a)\leq s(T)\leq\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\leq S(T)\leq M(b-a)$

（Darboux 上下和均有界）

性质1. 对于 $[a,b]$ 的任意分割 T_1, T_2，若 $T_1\subset T_2$（T_2 是 T_1 的加细），则

$s(T_1)\leq s(T_2)$，$S(T_1)\geq S(T_2)$ 即随着分割的加细，

Darboux 下和不减，Darboux 上和不增

证明：对分割 T_2 的任意区间 $\Delta_k^{(2)}$，均存在分割 T_1 的某一区间 $\Delta_i^{(1)}$

s.t. $\Delta_i^{(2)} \subseteq \Delta_i^{(1)}$，而 $\inf_{x\in\Delta_i^{(2)}}\{f(x)\} \ge \inf_{x\in\Delta_i^{(1)}}\{f(x)\}$，$\sup_{x\in\Delta_i^{(2)}}\{f(x)\} \le \sup_{x\in\Delta_i^{(1)}}\{f(x)\}$

对 $[a,b]$ 的 $\forall$ 分割 T_1, T_2，有 $s(T_1) \le S(T_2)$ 且

$m(b-a) \le s(T_1) \le S(T_2) \le M(b-a)$　达布上和是下和的上界，达布下和是上和的下界

作分割 $T = T_1 \cup T_2$，则 $s(T_1) \le s(T) \le S(T) \le S(T_2)$（$T$ 是 T_1 与 T_2 的加细）

性质2. 对某一固定分割 T，相对于 $\forall$ 介点集 $\{\xi_i\}$，上和 $S(T)$ 是所有 Riemann 和的上确界，下和 $s(T)$ 是所有 Riemann 和的下确界

证明：由 $m(b-a) \le s(T) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le S(T) \le M(b-a)$ 可知

对分割 T 而言，Darboux 上（下）和分别是所有 Riemann 和的上（下）界

↓ 上确界　$M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x)$　$\therefore \forall \varepsilon > 0$，$\exists \eta_i \in \Delta_i$ s.t. $M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\eta_i) \le M_i$

$\therefore \sum_{i=1}^{m} M_i\Delta x_i - \varepsilon < \sum_{i=1}^{m} f(\eta_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{m} M_i\Delta x_i$

↓ 上确界　即 $S(T) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{m} f(\eta_i)\Delta x_i \le S(T)$

从而 $S(T)$ 是对于分割 T 的所有 Riemann 和的上确界

同理 $s(T)$ 是对于分割 T 的所有 Riemann 和的下确界

达布上积分与下积分：设 T_1, T_2 均为 $[a,b]$ 的分割，T_2 是 T_1 的加细，则 $s(T_1) \le s(T_2)$，$S(T_1) \ge S(T_2)$

即达布下和关于分割的加细不减，上和关于分割的加细不增

如果 f 在 $[a,b]$ 上有界，则对 f 的达布上下和均存在上下确界

记 $S = \inf_T S(T)$，$s = \sup_T s(T)$，分别称其为 f 在 $[a,b]$ 的上积分与下积分

分别记作 $S = \overline{\int_a^b}$ 和 $s = \underline{\int_a^b}$。

达布定理：f 在 $[a,b]$ 上的上（下）积分也是上和（下和）在 $\|T\| \to 0^+$ 时的极限，即

$\lim_{\|T\|\to 0^+} S(T) = S$，$\lim_{\|T\|\to 0^+} s(T) = s$.

$\because S = \inf_T S(T)$　$\therefore \forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 分割 T' s.t. $S \le S(T') < S + \frac{\varepsilon}{2}$

设 T' 由 p 个分点构成，对 $\forall$ 分割 T，$T \cup T'$ 至多比 T 多 p 个分点，

$\therefore S(T)-p(M-m)\|T\| \le S(T\cup T') \le S(T')$

即有 $S(T) \le S(T')+p(M-m)\|T\|$

取 $\|T\| < \dfrac{\varepsilon}{2p(M-m)} \triangleq \delta$，有 $S(T) < S(T')+\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\therefore \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=\dfrac{\varepsilon}{2p(M-m)}$，当 $\|T\|<\delta$ 时，有 $S \le S(T) < S(T')+\dfrac{\varepsilon}{2} < S+\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{\|T\|\to 0^+} S(T)=S$

定理. 函数 f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow$ f 在 $[a,b]$ 的上下积分相等

可积
⇕
上下积分
⇕
上下和⇔振幅加权

证明：必要性：设 f 在 $[a,b]$ 可积，记 $J=\int_a^b f(x)\,dx$

由积分的定义 $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$，当 $\|T\|<\delta$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon$$

对于分割 T，$\exists \xi_i' \in \Delta_i$ s.t. $m_i \le f(\xi_i') < m_i+\dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$\therefore$ 当 $\|T\|<\delta$ 时，有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i - J\right| = |s(T)-J|$

$$=\left|\left(\sum_{i=1}^{m} m_i\Delta x_i - \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i')\Delta x_i\right)+\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i - J\right|$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i - J\right| + \left|\sum_{i=1}^{m}(m_i-f(\xi_i'))\Delta x_i\right| < \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{\|T\|\to 0^+} s(T)=J$，同理 $\lim\limits_{\|T\|\to 0^+} S(T)=J$

充分性：设 f 的上下积分 $S=s=J$，由 Darboux 定理有 $\lim\limits_{\|T\|\to 0^+} S(T)=\lim\limits_{\|T\|\to 0^+} s(T)=J$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$，当 $\|T\|<\delta$ 时，有

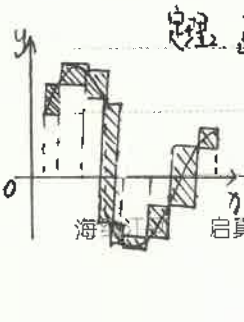
$$J-\varepsilon < s(T) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le S(T) < J+\varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{\|T\|\to 0^+} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = J$

$\therefore f$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $\int_a^b f(x)\,dx = J$

定理. 函数 f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$，总 $\exists$ 相应的分割 T s.t. $S(T)-s(T)<\varepsilon$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

$\left(\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\dfrac{\Delta x_i}{b-a}<\varepsilon\right)$，加权平均振幅趋向于零　$(\omega_i=M_i-m_i)$



证明：必要性：设 f 在 $[a,b]$ 上可积，由上述定理知 $\lim\limits_{\|T\|\to 0^+} S(T)=\lim\limits_{\|T\|\to 0^+} s(T)=J$

即 $\lim_{\|T\|\to 0}[S(T)-s(T)]=0$.

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $\|T\|<\delta$ 时, $0\le S(T)-s(T)<\varepsilon$.

充分性 若对 $\forall\varepsilon>0$, 总 $\exists$ 相应分割 T s.t. $S(T)-s(T)<\varepsilon$.

又对 $\forall$ 分割 T 有 $s(T)\le \underline{\int_a^b} \le \overline{\int_a^b} \le S(T)$

$\therefore 0\le \overline{\int_a^b}-\underline{\int_a^b}<\varepsilon$ 根据 ε 任意性, 有 $S=s$ 从而 f 在 $[a,b]$ 可积.

推论: 若 f 在 $[a,b]$ 上可积 则 $\forall[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, f 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积

定理3. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 $\forall\varepsilon>0, \sigma>0$, $\exists$ 分割 T, s.t. 振幅 $\omega_i\ge\varepsilon$ 的那些区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度之和 $\sum_{\omega_i\ge\varepsilon}\Delta x_i<\sigma$. (即振幅不能任意小的区间的长度之和可以任意小)

小区间振幅

充分性: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 则 $\exists M>0$, $\forall x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\le M$.

$\forall \varepsilon=\sigma>0$, $\exists$ 分割 T s.t. $\omega_i\ge\varepsilon$ 的区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度之和 $\sum_{\omega_i\ge\varepsilon}\Delta x_i<\sigma=\varepsilon$.

$\therefore \sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=\sum_{\omega_i<\varepsilon}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\omega_i\ge\varepsilon}\omega_i\Delta x_i<(b-a)\varepsilon+2M\varepsilon$ $\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

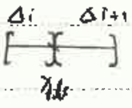
必要性: 反证法 假设 $\exists\varepsilon_0>0,\sigma_0>0$ $\forall$ 分割 T, $\omega_i\ge\varepsilon_0$ 的小区间长度之和不小于 σ_0.

则 $\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=\sum_{\omega_i<\varepsilon_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\omega_i\ge\varepsilon_0}\omega_i\Delta x_i\ge\varepsilon_0\sum_{\omega_i\ge\varepsilon_0}\Delta x_i\ge\varepsilon_0\sigma_0$.

$\therefore$ 当 $\|T\|\to0$ 时 $\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i$ 不趋向于0, 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积矛盾.

例1. 证明 Riemann 函数在 $[0,1]$ 上可积. $R(x)=\begin{cases}1, & x=0\text{或}1,\\ \frac1q, & x=\frac pq, (p,q)=1, 0<x<1,\\ 0, & x\text{为}(0,1)\text{内无理数}\end{cases}$

$\forall\varepsilon>0,\sigma>0$ 满足 $\frac1q\ge\varepsilon$ 的正整数 q 只有有限个.



$\therefore$ 满足上述条件的有理数 $\frac pq$ 只有有限个 (设为 k 个)

$\therefore$ 含有这些点的区间最多 $2k$ 个 其 $\omega_k\ge\varepsilon$.

对分割 T, 当 $\|T\|<\frac{\sigma}{2k}$ 时, 小区间长度和 $\sum_{k'}\Delta x_{k'}\le 2k\|T\|<\sigma$ $\therefore$ 在 $[0,1]$ 可积.

例2. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin^2\frac1{x^2}, & x\ne0,\\0, & x=0\end{cases}$ 求 $f'(x)$ 讨论 $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的可积性

$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin^2\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\sin\frac{2}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 而 $f'\left(\frac{2}{\sqrt{4n\pi+\pi}}\right)=\frac{2}{\sqrt{4n\pi+\pi}}-\sqrt{4n\pi+\pi}$

∴ $f'(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内无界 ∴ $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 不可积

注：∵ $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 不可积 ∴ $\int_{-1}^{1} f'(x)dx$ 不能使用 Newton-Leibniz 公式.

Newton-Leibniz 公式应用条件为 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

例2. 设 f 在 $[a,b]$ 可积，g 在 $[a,b]$ 有定义，且除有限点外 $f(x)=g(x)$. 证明：$g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

设只在 $x=c_i$ $(i=1,\cdots,p,\ p\in N^*)$ 处 $f(x)\neq g(x)$

对 $[a,b]$ 的分割 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. $\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

则 $\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_1 (g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i$

其中 $\sum_1$ 表示在对含有 $\{c_i\}$ 中的点的小区间（至多 $2p$ 个）求和.

记 $M_1=\sup\limits_{a\le x\le b}|g(x)|$, $M_2=\sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$.

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2p(M_1+M_2)}$，当 $\|T\|<\delta$ 时 $\left|\sum_1 (g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i\right|$
$\le (M_1+M_2)\sum_1 \Delta x_i<(M_1+M_2)2p\delta=\varepsilon$.

∴ $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

3. 可积函数类：下列三类函数在 $[a,b]$ 上均可积：(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 (2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且 f 在 $[a,b]$ 上最多有限个（可数多个）间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 (3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 (1). ∵ f 在 $[a,b]$ 连续，从而 f 在 $[a,b]$ 一致连续，即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x',x''\in[a,b]$,
$|x'-x''|<\delta$，均有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\forall\varepsilon>0$，只要分割 $T=\{\Delta_i|i=1,2,\cdots,n\}$ 的模 $\|T\|<\delta$，便有 $\omega_i=M_i-m_i$
$=\sup\limits_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')-f(x'')|\le\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$ $\therefore f$在$[a,b]$可积.

(2) 设f在$[a,b]$上的上下确界为M, m ($m<M$, 否则f为常函数). 不妨设f在$c\in[a,b]$处间断. $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta' = \frac{\varepsilon}{6(M-m)} > 0$. 记$\Delta' = [c-\delta', c+\delta'] \subseteq [a,b]$.

(若$c=a$, 取$\Delta' = [a, a+\delta']$. 若$c=b$, 取$\Delta' = [b-\delta', b]$). (用小区间将间断点挖去)

$\therefore f$在Δ'上的振幅为ω'. 则$\omega' \cdot 2\delta' \le (M-m) \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{6(M-m)} = \frac{\varepsilon}{3}$

$\because f$在$[a, c-\delta']$和$[c+\delta', b]$上连续 $\therefore f$在$[a, c-\delta']$, $[c+\delta', b]$上均可积.

$\therefore$分别存在各自的分割T_1, T_2 s.t. $\sum_{T_1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$, $\sum_{T_2} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$

作$[a,b]$的分割$T = T_1 \cup \Delta' \cup T_2$. 有$\sum_{T} \omega_i \Delta x_i = \sum_{T_1} \omega_i \Delta x_i + \omega' \cdot 2\delta' + \sum_{T_2} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$

$\therefore f$在$[a,b]$上可积

注: 可进一步证明 若f在$[a,b]$有界且只有有限个间断点, 则f在$[a,b]$可积

(3) 不妨设f在$[a,b]$ $\nearrow$, 且$f(a)<f(b)$. (否则f为常函数)

对$[a,b]$的任意一个分割$T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$

$\because f \nearrow$ $\therefore \omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. $\therefore \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i \|T\| = \|T\| \sum_{i=1}^{n} \omega_i = (f(b)-f(a))\|T\|$

$\therefore \forall \varepsilon>0$. 取$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. 当$\|T\|<\delta$时有$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$

$\therefore f$在$[a,b]$可积.

例. 证明 $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}. \end{cases}$ 在$[0,1]$可积.

法一. $\because f$在$[0,1]$单调递增 $\therefore f$在$[0,1]$可积.

(f在$[0,1]$有无穷多个间断点, $x_n = \frac{1}{n}$. $(n \ge 2)$)

法二. $\because \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. $\therefore \forall \varepsilon>0$. $\exists N>0$. $\forall n>N$. $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore$只有有限个自然数n ($n \le N$) 满足 $\frac{1}{n} \ge \frac{\varepsilon}{2}$.

$\therefore f$在$[\frac{\varepsilon}{2}, 1]$上只有有限个间断点. $\therefore f$在$[\frac{\varepsilon}{2}, 1]$可积.

在该区间内有限间断⇒∃$[\frac{\varepsilon}{2},1]$的分割$T'$ s.t. $\sum_{T'}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$.

将$[0,\frac{\varepsilon}{2}]$与$T'$合并,得到$[0,1]$分割$T$.

$\because f$在$[0,\frac{\varepsilon}{2}]$振幅$\omega'<1$ $\therefore \sum_T\omega_i\Delta x_i=\sum_{T'}\omega_i\Delta x_i+\omega'\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ $\therefore f$在$[0,1]$可积.

试求$\int_0^1 f(x)dx$.

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\underset{(\text{裂项})}{\frac{1}{n(n+1)}}=\frac{\pi^2}{6}-1$$

例2. 证明 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1}{x}-[\frac{1}{x}], & 0<x\le 1\end{cases}$ 在$[0,1]$可积,并计算$\int_0^1 f(x)dx$.

当$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$时,$[\frac{1}{x}]=n$. $\therefore f(x)$在$x=\frac{1}{n}$处间断,在其它点处均连续.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, $\forall n>N$时 $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ $\therefore$仅有有限个自然数$n(n\le N)$满足$\frac{1}{n}\ge\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore f(x)$在$[\frac{\varepsilon}{2},1]$上最多只有有限个间断点 $\therefore f(x)$在$[\frac{\varepsilon}{2},1]$可积.

$\exists[\frac{\varepsilon}{2},1]$的分割$T'$ s.t. $\sum_{T'}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$.

又$0\le f(x)<1$ $\therefore f$在$\Delta'=[0,\frac{\varepsilon}{2}]$上的振幅$\omega'\le 1$

作$[0,1]$的分割$T=T'\cup\Delta'$,则$\sum_T\omega_i\Delta x_i=\sum_{T'}\omega_i\Delta x_i+\omega'\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

$\therefore f$在$[0,1]$可积.

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\frac{1}{x}dx-\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}n\,dx\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(n+1)-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$

$$=-\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)+1=1-\gamma$$

注:记$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$,则$\lim_{n\to\infty}a_n=\gamma=0.5772\cdots$ γ称Euler常数.

例3. 设$f(x)$在$[a,b]$ Riemann可积,且$\int_a^b f(x)dx<0$. 证明:∃闭区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ s.t. $x\in[\alpha,\beta]$时,$f(x)<0$.

反证法:假设$\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,$\exists\xi\in[\alpha,\beta]$ s.t. $f(\xi)\ge 0$.

∴对$[a,b]$的任意分割Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. $\exists\,\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ s.t. $f(\xi_i)\geq 0$

∴$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\geq 0$ 矛盾.

∴$\exists\,[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 当$x\in[\alpha,\beta]$时有$f(x)<0$

例4. 有界函数 $f(x)$在$[a,b]$上的不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. 且$\lim_{n\to\infty}x_n$存在. 证明: $f(x)$在$[a,b]$可积.

不妨设$\lim_{n\to\infty}x_n=c\in(a,b)$. 令$|f(x)|\leq M$.

$\forall\varepsilon>0$ 取$\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{12M},c-a,b-c\}$. 则$\exists N>0$. $\forall n>N$. $|x_n-c|<\delta$.

∴$f(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上只有有限个不连续点.

∴$f(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$可积 ∴$\exists\,[a,c-\delta]$的分划$T^{(1)}$ $[c+\delta,b]$的分划$T^{(2)}$

s.t. $\sum_i \omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)}<\frac{\varepsilon}{3}$. $\sum_i \omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)}<\frac{\varepsilon}{3}$

将$T^{(1)}$. $T^{(2)}$分点合并与$[c-\delta,c+\delta]$组成$[a,b]$的分划T. 则

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leq\sum_i\omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)}+\sum_i\omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)}+\underset{(2M\cdot 2\delta)}{4M\delta}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

∴$f(x)$在$[a,b]$可积

若$c=a$或b. 同理可证 $f(x)$在$[a,b]$可积

§1 数项级数的收敛性

1. 级数的概念：给定$\{a_n\}$，将其每一项依次用+号连接起来的表达式 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 称为无穷级数

由于a_n是常数，也称常数项级数，记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$

如果通项为函数$u_n(x)$，则称$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$为函数项级数。

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ Fourier级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

注：级数不满足交换律，由$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots(-1\le x\le 1)$知，

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

$$又\ \frac{1}{2}\ln 2=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots$$

$$\therefore \frac{3}{2}\ln 2=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

部分和：在$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$中，前n项和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\ (n\in N^+)$称为该级数的部分和。

得到的数列$\{S_n\}$称为部分和数列

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的通项$a_n$与部分和数列$\{S_n\}$之间的关系：$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\ge 2\end{cases}$

常见的三类级数：(1) 常数项级数：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 前n项和 $S_n=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$

(2) 函数项级数：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$（几何级数）

前n项和 $S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$ 当$|x|<1$时 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{1-x}$

(3) 三角级数：$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 与周期现象有关

2. 级数的收敛与发散：若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的部分和数列$\{S_n\}$收敛于S（$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$）则称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛

$\{S_n\}$极限S称为级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的和，记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=S$。

即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$部分和数列$\{S_n\}$发散，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散。

级数的敛散性$\Leftrightarrow$部分和数列的敛散性

例1. 讨论$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$的敛散性

当$k\in N^+$时，有$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to+\infty} S_n = 1 \quad \therefore \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛 $S=1$.

例2. 讨论级数 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$ 的敛散性

当 $k\in N^+$ 时, 有 $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$\therefore \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4} \quad \therefore \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛 $S=\frac{1}{4}$

变式. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$ 的敛散性

当 $k\in N^+$ 时 $\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)\cdots(k+p)}\right]$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{1\cdot2\cdots p} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}\right]$

$\therefore S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1\cdot2\cdots p} = \frac{1}{p\cdot p!}$

例3. 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\frac{1}{2n^2}$ 的敛散性.

$\because \arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy}$ 裂项结构

$\therefore \arctan\frac{1}{2n^2} = \arctan\frac{1}{2n-1} - \arctan\frac{1}{2n+1}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{2k-1} - \arctan\frac{1}{2k+1}\right) = \arctan 1 - \arctan\frac{1}{2n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$

3. 级数收敛的必要条件: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (对通项阶数进行估计 $a_n = f(n) = \begin{cases} q^n \\ \frac{1}{n^p}\end{cases}$)

证明: $\because \lim_{n\to+\infty} S_n = S \quad \therefore \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$

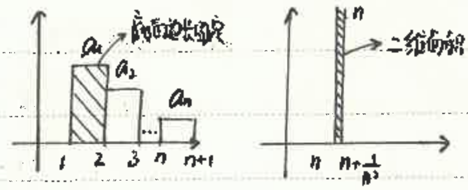
$\because \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0 \quad \therefore$ 级数发散

注: 该条件为必要不充分条件. 反例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ (调和级数)

级数与反常积分之间的关系: 构造 $f(x) = a_n \ (n\le x<n+1, n\in N^+)$. 则 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx$

$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

但 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ 与反常积分有区别



$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\not\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

如 $\int_0^{+\infty} x\sin x^4\, dx$

4. 等比级数(几何级数)的敛散性：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} aq^n = a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots\ (a\neq 0)$ 称为等比级数

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} aq^n$ 部分和 S_n.

(1) 当 $q=1$ 时 $S_n=na$ 发散.

(2) 当 $q=-1$ 时 $S_{2n}=0$, $S_{2n-1}=a\ (n=1,2,\cdots)$ 发散.

(3) 当 $|q|\neq 1$ 时 $S_n=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$

1° 当 $|q|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{a}{1-q}$ 收敛 $S=\dfrac{a}{1-q}$

2° 当 $|q|>1$ 时 发散.

∴ 综上 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} aq^n=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}, & |q|<1, \quad (a\neq 0)\\ \text{发散}, & |q|\geq 1\end{cases}$

5. 级数收敛的 Cauchy 准则：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N\ (n\in N)$ 对 $\forall p\in N^+$ 均有

$|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0$, 对 $\forall N>0$, $\exists n_0>N$ 及 $p_0\in N^+$ 有

$|S_{n_0+p_0}-S_{n_0}|=|a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots+a_{n_0+p_0}|\geq\varepsilon_0$

例. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

当 $k\geq 2$, $k\in N^+$ 时有 $\frac{1}{k^2}<\underbrace{\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}}^{\text{裂项结构}}$

$\therefore \forall p\in N^+$, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}<\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n+p}}<\frac{1}{n}$

$\therefore \forall\varepsilon>0$ $\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时, $\forall p\in N^+$ 均有 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon$

由 Cauchy 收敛准则知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

例1. 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

法一. Cauchy 收敛准则.

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$. $\forall N>0$ $\exists n(\in N)>N$. $p=n$

有 $\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right|>\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2}$ ∴发散

法二. 记部分和为 S_n

$\therefore S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^m}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})+\cdots+$

$(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m})>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8})+\cdots+\underbrace{(\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m})}_{2^{m-1}\text{项}}$

$=1+\frac{m}{2}\to+\infty$. ∴ $\{S_n\}$ 发散 ∴级数发散

法三. ∵ $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$ 以 $\frac{1}{k}(k\in N^+)$ 代 x.

$\therefore \frac{1}{k+1}<\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k}$ $\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$\therefore S_{n+1}-1<\ln(n+1)<S_n$ $\therefore \ln(n+1)<S_n<1+\ln n$

∴ $\{S_n\}$ 无界 ∴发散

变式1. 求 $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$.

$\ln I=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})$ ∵ $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(\underset{\downarrow\frac{1}{2}}{\frac{k}{n^2}}-\underset{\downarrow 0}{\frac{k^2}{2n^4}})<\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})<\sum_{k=1}^{n}\underset{\downarrow\frac{1}{2}}{\frac{k}{n^2}}$ $\therefore I=\sqrt{e}$

变式2. 证明 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$ ∴ $\{a_n\}\downarrow$.

$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(n+1)-\ln n>0$ ∴由单调收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛

$\lim_{n\to+\infty}a_n=\gamma=0.5772\cdots$

6. 收敛级数的性质: 性质1. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛. 则 $\forall k_1, k_2\in\mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(k_1a_n+k_2b_n)$ 也收敛. 且

$\sum_{n=1}^{+\infty}(k_1a_n+k_2b_n)=k_1\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+k_2\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ (线性性)

性质2. 去掉、添加或改变级数的有限项，不改变级数的敛散性

性质3. 收敛级数任意添加括号后所得级数仍然收敛，且其和不变

（去括号不一定：$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)$ ）

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots$ 发散，但添括号后 $\sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^{n-1}+(-1)^n]=(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛

证明：设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 部分和 S_n，添括号后得 $(a_1+a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_8)+\cdots+$

$(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$ 记 $b_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$，得 $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$，设部分和 T_k.

$\therefore T_1=S_3,\ T_2=S_8,\ \cdots,\ T_k=S_{n_k}$

$\therefore \{T_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 子列 $\because \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \{T_n\}$ 收敛.

（但 $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ 收敛，$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 不一定收敛）

例1. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 添加括号所得级数 (1) $(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots$

(2) $a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots$ 均收敛于 S，问原级数是否收敛？

设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 部分和 S_n，则 (1)(2) 部分和 S_{2n}，S_{2n+1}. (1)(2) 收敛 $\Rightarrow$ 奇偶子列均收敛于 S

$\therefore \{S_n\}$ 收敛

例2. (1) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

反证：记 $c_n=a_n+b_n$，若 $\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$ 收敛，而 $b_n=c_n-a_n$，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛 矛盾

(2) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ 不一定发散

取 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$

例3. 判断级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$ 敛散性.

$a_n=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{m+1}-1}, & n=2m-1\\ -\frac{1}{\sqrt{m+1}+1}, & n=2m\end{cases}$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\therefore$ 原级数发散

注. a_n 为交错级数 $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ 但 $|a_n|$ 不↓ $\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

§3 正项级数

1. 正项级数的概念：每一项均非负数的级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n \geq 0)$

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 其部分和数列 $\{S_n\}$ 即 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

显然 $\{S_n\} \uparrow$ 由单调收敛准则知正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界

证明：$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \{S_n\}$ 有上界

$\{S_n\} \uparrow$，有上界 $\Rightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛

例1. 证明调和级数发散

$x>0$ 时 $\ln(1+x) < x$ $\therefore \forall n \in N^+$，$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

$\therefore S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(n+1)$

$\therefore \ln(n+1) < S_n < 1 + \ln n$ $\therefore \{S_n\}$ 无界 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

例2. 证明：在调和级数中，将含数字9的项去掉后所得级数收敛

一位数不含9共8个

两位数不含9共 8×9 个

$$\frac{8}{0\times\ 9\times} \times \frac{9}{9\times} \times \frac{9}{9\times} \times \cdots \times \frac{9}{9\times}$$

三位数不含9共 $8\times9\times9$ 个

$\therefore n$ 位数不含9共 $8\times 9^{n-1}$ 个

设n位数倒数和 a_n $\therefore a_n < \frac{8\times 9^{n-1}}{10^{n-1}} = 8\times(\frac{9}{10})^{n-1}$ （正项级数添括号不改变敛散性）

记前m项和为 S_m $\therefore S_m < 8[1 + \frac{9}{10} + \cdots + (\frac{9}{10})^{n-1} + \cdots] < 80$ $\therefore \{S_m\}$ 有界 $\therefore$ 收敛

例3. $a_1 = 2$，$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 证明：(1) $\{a_n\}$ 收敛 (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛

(1) 由数归知 $a_n > 0$ $\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \geq 1$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1-a_n^2}{2a_n} < 0$ $\therefore \{a_n\} \downarrow$ 有下界 $\therefore \{a_n\}$ 收敛

记 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 1$ $\therefore a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) \Rightarrow a = 1$

(2) 设部分和 S_n $\therefore 0 < S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}}\right) \leq \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) \leq a_1 - a_{n+1} \leq 2$

裂项结构

$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛

注. 数列收敛可化为级数收敛. $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛 $(=a_1-a_{n+1})$

2. 正项级数的比较判别法: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n, \sum_{n=1}^{+\infty}b_n$. 如果 $\exists n_0\in N$ 当 $n>n_0$ 时有 $a_n\le b_n$ (充分大下限)

则 (1) $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散

证明: ∵改变级数有限项, 不改变级数的敛散性

∴不妨设 $\forall n\in N$, $a_n\le b_n$ 记 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n, \sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 部分和 S_n, T_n ∴ $S_n\le T_n$

若 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛, 记其和为 T ∴ $T_n\le T$ ∴ $S_n\le T_n\le T$

∴ $\{S_n\}$ 有上界 ∴ $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

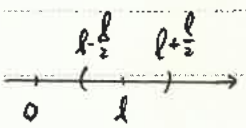
正项级数的极限判别法: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n, \sum_{n=1}^{+\infty}b_n$. 若 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$. 则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n, \sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 同敛散

(2) 当 $l=0$ 时 $(a_n<b_n)$ 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

(3) 当 $l=+\infty$ 时 $(a_n>b_n)$. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛

证明: ∵ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l \quad (0<l<+\infty)$



∴ 对 $\varepsilon=\frac{l}{2}$, $\exists N>0$, $\forall n>N$, $\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon=\frac{l}{2}$

∴ $\frac{l}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2}l$ ∴ $\frac{l}{2}b_n<a_n<\frac{3}{2}lb_n$

若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{l}{2}b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛

若 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{2}lb_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

例. 判断 p-级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性

当 $p\le1$ 时 $\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$ 而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散 ∴ 发散

当 $p>1$ 时. 法一. Lagrange + 放缩

部分和 $S_n=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$. 欲证上界, 构造裂项结构

找 $\frac{1}{n^p} \le \underbrace{\overset{\text{裂项结构}}{f(n)-f(n+1)}}_{\text{Lagrange形式}} = f'(\xi)$. 又 $f(x)=\frac{1}{x^{p-1}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1-p}{x^p}$.

$\therefore$ 以 $f(x)=\frac{1}{x^{p-1}}$ 为研究对象。

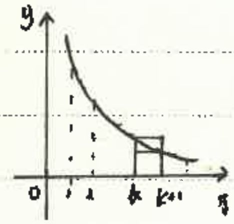
对 $f(x)=\frac{1}{x^{p-1}}\ (x\ge 1)$ 在 $[n,n+1]$ 用 Lagrange 中值定理知

$\exists\, \theta_n\in(0,1)$ s.t. $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{(n+1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}=-\frac{p-1}{(n+\theta_n)^p}$.

$\therefore \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right)=\frac{1}{(n+\theta_n)^p}>\frac{1}{(n+1)^p}$

又正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right)$ 收敛 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛

$\therefore$ 综上 $p\le 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散. $p>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.



法二. 积分放缩 当 $x\in[k,k+1]$ 时 $\frac{1}{(k+1)^p}<\frac{1}{x^p}\le\frac{1}{k^p}$

$\therefore \frac{1}{(k+1)^p}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^p}\le\frac{1}{k^p}$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^p}<\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^p}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$

$\Leftrightarrow\ S_{n+1}-1<\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^p}\le S_n$

又 $\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^p}<\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$

$\therefore S_{n+1}<\frac{p}{p-1}$ $\therefore \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

法三. 分组放缩. 记 $\frac{1}{2^{p-1}}=r<1$.

$\therefore \frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<2\times\frac{1}{2^p}=r$.

$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<2^2\times\frac{1}{4^p}=\frac{1}{2^{2(p-1)}}=r^2$

...

$\frac{1}{(2^n)^p}+\frac{1}{(2^n+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}<2^n\times\frac{1}{(2^n)^p}=r^n$

$\therefore S_n\le S_{2^n-1}<1+r+\cdots+r^{n-1}<\frac{1}{1-r}$ $\therefore \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

注: $\because \sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow a_n\to 0$ $\therefore a_n$ 常与 $\frac{1}{n^p}$、$q^n\ (|q|<1)$ 对比.

例2. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$ 敛散性 $(a>0,\ a\ne 1)$.

$\because a^x+a^{-x}-2 \overset{\text{指化}}{=} e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}-2 \underset{\text{阶数估计}}{\overset{\text{Taylor}}{=}} \left(1+x\ln a+\frac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2)\right)$

$+(1-x\ln a+\frac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2))-2=(\ln^2 a)x^2+o(x^2)$

∴ $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\ln^2 a$

∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^{\frac1n}+a^{-\frac1n}-2}{\frac{1}{n^2}}=\ln^2 a>0$ 又 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛 ∴收敛

注：一般能推二阶：“1 一阶发散 “2 二阶以上均收敛.

例3. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$敛散性.

$\sqrt[n]{n}-1\xlongequal{指数}e^{\frac{\ln n}{n}}-1=(1+\frac{\ln n}{n}+\frac{(\ln n)^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-1\sim\frac{\ln n}{n}$

而 $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}\ (n\geq3)$ ∴发散

例4. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac1n-\ln(1+\frac1n))$敛散性.

∵ $x\to0$时 $x-\ln(1+x)=x-[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

∴ $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac12$ ∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(\frac1n-\ln(1+\frac1n))=\frac12$

又 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛 ∴收敛.

例5. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ 敛散性 $(\alpha>0)$.

(1). 当$\alpha\leq1$时 $\frac{\ln n}{n^\alpha}>\frac{1}{n^\alpha}\ (n\geq3)$ 又 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$发散 ∴ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$发散.

(2) 当$\alpha>1$时. 记 $\alpha=1+2\beta\ (\beta>0)$ (便于论述)

∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0\ (\alpha>0)$ ∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0$

∴ n充分大时, $0<\frac{\ln n}{n^\beta}<1$

∴ $0<\frac{\ln n}{n^\alpha}=\frac{\ln n}{n^{1+2\beta}}=\frac{1}{n^{1+\beta}}\frac{\ln n}{n^\beta}<\frac{1}{n^{1+\beta}}\ (\beta>0)$

又 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\beta}}$收敛 ∴收敛

变式. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ln n)^p}{n^\alpha}$ 收敛 $(\alpha>0)$.

例6. 设 $a_n=\int_0^{\frac1n}\sqrt{\frac{x}{1+e^x}}dx\ (n=1,2,\cdots)$ 判断 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$敛散性.

对a_n进行阶数估计: $n\to+\infty$, $\frac1n\to0$, $x\to0$, $e^x\to1$(常数: 放缩).

$a_n=\int_0^{\frac1n}\sqrt{\frac{x}{1+e^x}}dx<\frac{1}{\sqrt2}\int_0^{\frac1n}\sqrt{x}dx=\frac{\sqrt2}{3}\frac{1}{n\sqrt n}$ 又 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt n}$收敛 ∴收敛

证收敛: 放大

引申1. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

分母影响敛散性? 放缩 $0\le \frac{x^n}{1+x}\le x^n$

$\therefore 0\le I\le \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$ $\therefore I=0$.

引申2. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx$. $f\in C[0,1]$.

由连续函数性质知: $\because f\in C[0,1]$ $\therefore \exists M$ s.t. $\forall x\in[0,1], |f(x)|\le M$

$\therefore -Mx^n\le x^n f(x)\le Mx^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{-M}{n+1}\le I\le \lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n+1}$ $\therefore I=0$

例7. 设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{2+\sin x}}\,dx$ $(n=1,2,\dots)$ 判断 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 敛散性.

常数(放缩)

阶数估计 $\because a_n<\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛 $\therefore$ 收敛.

例8. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛. 问是否 $\exists N\in\mathbb{N}$. 当 $n\ge N$ 时 $a_n<\frac{1}{n}$?

取 $a_n=\begin{cases}\frac{2}{n}, & n=10^k.\ k\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{n^2}, & n\in\mathbb{N},\ n\neq 10^k\end{cases}$ ($>\frac{1}{n}$的项可以很稀疏)

$\therefore \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{10^k}$ 收敛 又 $\sum_{n\neq 10^k}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

例9. 判断 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$ 敛散性.

阶数处理: $\frac{1}{2\sqrt{n}}\le\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$\therefore \frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}<\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p<\frac{1}{(2n+1)^{\frac{p}{2}}}$

当 $p>2$ 时. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^{\frac{p}{2}}}$ 收敛 $\therefore$ 收敛.

当 $p\le 2$ 时. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ 发散 $\therefore$ 发散

例10. 判断 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ 敛散性.

$a_n=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}=\frac{(2n)!}{((2n)!!)^2}\overset{\text{奇偶分拆}}{=}\frac{(2n)!!(2n-1)!!}{((2n)!!)^2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\frac{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)\cdot 2n}>\frac{1}{2n}$

又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\therefore$ 发散

例11. $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ $(n\in\mathbb{N})$. (1) 计算 a_n+a_{n+2} (2) 证明 $\lambda>0$ 时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛

tan² 凑 sec²

(1) $a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \sec^2 x\,dx = \frac{1}{n+1}$

(2) $\lambda > 0$ 时. $\lim_{n\to+\infty} n^{\lambda+1} \cdot \frac{a_n}{n^{\lambda}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\lambda+1}}{n^{\lambda}(n+1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ∴收敛.

另: $2a_{n+2} < a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1} < 2a_n$ （a_n↓）

∴ $\frac{1}{2(n+1)} < a_n < \frac{1}{2(n-1)}$ ∴ $\lim_{n\to+\infty} n a_n = \frac{1}{2}$

例12. 设 $a_n \le b_n \le c_n$ 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 收敛. 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛.

$a_n \le b_n \le c_n \Rightarrow 0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$ 转化为正项级数.

$\sum_{n=1}^{+\infty} (c_n - a_n)$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n)$ 收敛 ∴ $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n + a_n)$ 收敛.

3.正项级数的比值判别法: 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数. 且 $\exists N_0 \in N$ 及常数 q $(0<q<1)$.

(1) 当 $n \geq n_0$ 时. 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$. 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当 $n \geq n_0$ 时. 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

证明: $n \geq n_0$ 时. 有 $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \le a_N q^{n-N}$

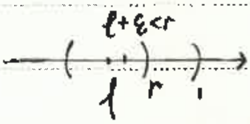
而 $\sum q^{n-N}$ 收敛

注: $\underset{(\text{不成})}{\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1} \Leftrightarrow \underset{(\text{无穷靠近})}{\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \nRightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛

正项级数的比值判别法-极限形式: 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数 且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ $(0 \le l \le +\infty)$. 则
(充分不必要条件)

(1) 当 $0 \le l < 1$ 时. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当 $l > 1$ 或 $l = +\infty$ 时. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散 ($l=1$ 时不确定)



证明: 当 $l<1$ 时. 取 $\varepsilon_0 > 0$. 且 $\varepsilon_0 < 1-l$

∴ $\exists N > 0$. $\forall n > N$. 有 $l - \varepsilon_0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon_0$

记 $l + \varepsilon_0 = r$ ∴ $0 < r < 1$ ∴ $\forall n > N$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r^{n-N}$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_{N+1} \cdot r^{n-N}$ 又 $\sum_{n=N+1}^{+\infty} r^{n-N}$ 收敛

∴由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

当$l>1$(或$+\infty$)时，取$\varepsilon_0=\frac{l-1}{2}$ ∴$\exists N>0$, $\forall n>N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}>l-\varepsilon_0=\frac{l+1}{2}>1$

∴$\forall n>N$, $a_{n+1}>a_n$ ∴$\{a_n\}\uparrow$ ∴$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\neq0$ ∴发散

4. 根值判别法：设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$是正项级数，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$ $(0\le\rho\le+\infty)$，则

(1) 当$\rho<1$时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛 (2) 当$\rho>1$或$\rho=+\infty$时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散 ($\rho=1$时不确定)。

简证：$\sqrt[n]{a_n}<r \Rightarrow a_n<r^n$ $(r<1)$

注：$l=1$或$\rho=1$时正项级数可能收敛，可能发散。如p-级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$.

$\forall p\in\mathbb{R}$, $l=\rho=1$，但$p>1$收敛，$p\le1$发散。

例1. 判断$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$的敛散性

$$\because \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=3\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$=3\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}>1 \quad \therefore 发散$$

注：阶乘用比值，n次方用根值

例2. 判断$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n\cdot n!}{n^n}$ $(a>0)$的敛散性

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n\cdot n!}=a\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=a\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{a}{e}$$

(1) 当$0<a<e$时 收敛，(2) 当$a>e$时发散

(3) 当$a=e$时 ∵$(1+\frac{1}{n})^n\uparrow\to e$ ∴$(1+\frac{1}{n})^n<e$

∴$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$ ∴发散

例3. 判断$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}$的敛散性

法一：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)^2}}{3}=\frac{1}{3}<1$ ∴由根值判别法知收敛

法二：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+2)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(n+1)^2}=\frac{1}{3}<1$ ∴由比值判别法知收敛

注：比值行，根值一定行；根值行，比值不一定行

例4. 判断$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5+(-1)^n}{2^n}$的敛散性

$\frac{5+(-1)^n}{2^n}<\frac{6}{2^n}$ 由比较判别法知收敛。（比值难判断）

5.正项级数的积分判别法：设$f(x)$在$[1,+\infty)$单调递减，且$\forall x\geq 1$，$f(x)>0$，则$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$与$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 有相同的敛散性。

证明：$\because f(x)\downarrow$ $\therefore \forall x\in[k,k+1]$ $k\in N^+$ 有$f(k+1)\leq f(x)\leq f(k)$

$\therefore f(k+1)\leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

记$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$部分和 S_n $\therefore S_n - f(1)\leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$

当$\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛时 $S_n\leq f(1)+\int_1^n f(x)dx \leq f(1)+\int_1^{+\infty} f(x)dx$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$部分和有界 $\therefore$ 收敛

当$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$收敛时，记其和为$S$ $\therefore \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}\leq S$

$\therefore \int_1^n f(x)dx \uparrow$ $\therefore$ 收敛。

例1. 判断$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$的敛散性

$\because \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p} \xlongequal{\ln x=u} \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^p}$ $\begin{cases} p>1, & 收敛 \\ p\leq 1 & 发散\end{cases}$

$\therefore p>1$ 收敛，$p\leq 1$ 发散

以$p=1$为分界

例2. 判断$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}$的敛散性

$\forall n\in N$，$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^\alpha}=0$ $(\alpha>0)$ $\therefore \exists G>0$，$\forall x>G$，$(\ln x)^n<x^\alpha \Rightarrow 0<\frac{(\ln x)^n}{x^\alpha}<1$

(1)当$p>1$时，记$p=1+2\alpha$ $(\alpha>0)$ $\therefore \exists N>0$，$\forall n\geq N$，

$\frac{1}{n^p(\ln n)^q}=\frac{1}{n^{1+\alpha}}\cdot\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^q} < \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 又$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$收敛 $\therefore$收敛

(2)当$p=1$时，$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}$与$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^q}$同敛散

由例1知，$q>1$收敛，$q\leq 1$发散

(3)当$p<1$时，记$p=1-2\alpha$ $(\alpha>0)$ $\therefore \exists N>0$，$\forall n\geq N$，

$\frac{1}{n^p(\ln n)^q}=\frac{1}{n^{1-\alpha}}\cdot\frac{n^\alpha}{(\ln n)^q} > \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ $\therefore$发散

例3. (1) $\sum a_n$为正项级数，$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，无法判断$\sum a_n$收敛

$\{a_n\}\downarrow$ 不一定 $a_n\to 0$.

(2) 对 $\sum a_n$，若 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\ge 1$，则 $\sum a_n$ 发散.

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\ge 1 \Rightarrow \{|a_n|\}\uparrow$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\ne 0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$ $\therefore$ 发散

(3) 设 $\sum a_n$ 为正项级数，不一定 $\exists\alpha>0$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1+\alpha}a_n=c>0$

取 $a_n=\frac{1}{n(\ln n)^2}$，由积分判别法知 $\sum\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛.

但 $\forall\alpha>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1+\alpha}}{n(\ln n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{(\ln n)^2}=+\infty$.

例4 设 x_n 为 $\tan x=x$ 正根且从小到大排列，求证：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

记 $f(x)=\tan x-x$，f 在 $(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2})$ 连续 $(\forall n\in N^+)$.

$f(n\pi)=-n\pi<0$，$\lim\limits_{x\to(n\pi+\frac{\pi}{2})^-}f(x)=+\infty$ $\therefore\exists x_n\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$ s.t. $f(x_n)=0$

又 $f'(x)=\sec^2x-1=\tan^2x\ge 0$ $\therefore f$ 在 $(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2})\uparrow$.

$\therefore\tan x=x$ 在 $(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2})$ 有唯一实根 $x_n\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$.

$\therefore x_n>n\pi\Rightarrow\frac{1}{x_n^2}<\frac{1}{n^2\pi^2}$ $\therefore\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

§4 任意项级数

1. 交错级数：若 $a_n>0$，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$ 为交错级数。

缺一不可

Leibniz判别法：若 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足 (1) $a_n>0$ (2) $\{a_n\}\downarrow(a_{n+1}\le a_n)$ (3) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

则交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛且 $S\le a_1$

证明：法一：Cauchy ∵ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ∴ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N>0$，$\forall n>N$，$0\le a_n<\varepsilon$.

又 $\{a_n\}\downarrow$ ∴ $a_n-a_{n+1}\ge 0$

∴当 p 为偶数时 $\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k-1}a_{n+k}\right| = (a_{n+1}-a_{n+2})+(a_{n+3}-a_{n+4})+\cdots+(a_{n+p-1}-a_{n+p})$

$= a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-(a_{n+4}-a_{n+5})-\cdots-(a_{n+p-2}-a_{n+p-1})-a_{n+p}$

$\le a_{n+1}$

当 p 为奇数时 $\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k-1}a_{n+k}\right| = (a_{n+1}-a_{n+2})+\cdots+(a_{n+p-2}-a_{n+p-1})+a_{n+p}$

$= a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-\cdots-(a_{n+p-1}-a_{n+p})\le a_{n+1}$

∴ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N>0$，$\forall n>N$，$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k-1}a_{n+k}\right|<a_{n+1}<\varepsilon$

由Cauchy收敛准则知，收敛。同样有 $S_n\le a_1$ ∴ $S=\lim_{n\to\infty}S_n\le a_1$

法二：部分和奇偶项，记 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 部分和 S_n.

$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$

$\le(a_1-a_2)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})+(a_{2n+1}-a_{2n+2})=S_{2n+2}$

$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\le a_1$

∴ $\{S_{2n}\}\uparrow$ 有上界 ∴ $\{S_{2n}\}$ 收敛，记 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$

∴ $\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=S$ ∴ $\{S_n\}$ 收敛 ∴收敛

注：由Leibniz易知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛。而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例1. 判断 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 敛散性.

解：设 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$b_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$，有 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，$b_n\to 1$.

但 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 发散.

对正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. $b_n \to 1$. 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛. (任意项级数不成立)

($\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = 1$ $\therefore \frac{1}{2} a_n < a_n b_n < \frac{3}{2} a_n$).

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \xlongequal{\text{分母有理化}} \frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$

而 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}$ 发散 $\therefore$ 发散.

变式: 若 $\sum a_n$ 收敛. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$ 则 $\sum a_n b_n$ 是否收敛?

取 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. $b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$

但 $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 发散.

例2. 判断 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 敛散性.

记 $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} > 0$. 则 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

构造 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ $\therefore f\downarrow$ $\therefore \{a_n\}\downarrow$

$\therefore$ 由 Leibniz 判别法知. 收敛.

2. 级数的条件收敛与绝对收敛: 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛. 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛; 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 发散.

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛.

注 (1) 由定义知. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛.

(2) 原级数加绝对值后, 可用比值或根值判别法判断原级数是否发散

(比值/根值本质: $|a_n| \to 0$. 若 $|a_n| \not\to 0$ 则 $a_n \not\to 0$).

绝对收敛级数的性质 (1) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 必收敛.

证明: Cauchy $\because \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛. 由 Cauchy 收敛准则知

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N > 0$ $\forall n > N$ $\forall p \in \mathbb{N}^+$ 有 $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

$\therefore |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

$\therefore$ 由 Cauchy 收敛准则知. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

正项不变，负项取0　　正项取0，负项取绝对值

(2) 记 $a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}$，$a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}$

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^-$ 均发散。

证明：$|a_n|=2a_n^+-a_n=2a_n^-+a_n$

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^+$ 收敛，$\because\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\therefore\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛　矛盾

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^-$ 均发散，即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^+=+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^-=+\infty$（正项级数）

例1. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n(n+2)}$ 敛散性。

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|(x-1)^{n+1}|}{(n+1)(n+3)}\cdot\frac{n(n+2)}{|(x-1)^n|}=|x-1|$

$\therefore$ 当 $|x-1|<1\Leftrightarrow 0<x<2$ 时，绝对收敛。

当 $|x-1|>1\Leftrightarrow x<0$ 或 $x>2$ 时，发散

当 $x=0$ 或 2 时，$|a_n|=\frac{1}{n(n+2)}$，绝对收敛

$\therefore$ 当 $0\le x\le 2$ 时绝对收敛，$x<0$ 或 $x>2$ 时发散。

例2. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi\underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{\text{与}n\pi\text{比较}})$ 敛散性

$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

令 $a_n=\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$　则 $a_n>0$，$a_n>a_{n+1}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

$\therefore$ 由 Leibniz 判别法知，收敛

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{\pi}{2}$　而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散　$\therefore$ 条件收敛

例3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln(1+n)}{n^\alpha}$ 条件收敛，求 α 取值范围。

记 $a_n=\frac{\ln(1+n)}{n^\alpha}$

当 $\alpha\le0$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}a_n=\infty$，发散

当 $0<\alpha\le1$ 时，$\{a_n\}\downarrow$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，由 Leibniz 判别法知，收敛。

又 $a_n=\frac{\ln(1+n)}{n^\alpha}\ge\frac{\ln(1+n)}{n}\ge\frac{1}{n}$ $(n\ge2)$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散　$\therefore$ 条件收敛。

当 $\alpha>1$ 时，记 $\alpha=1+2\beta\ (\beta>0)$

$\because \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n)}{n^\beta}=0$ $\therefore \exists N>0$ $(N\in N^+)$, $\forall n>N$ 有 $\frac{\ln(1+n)}{n^\beta}<1$

$\therefore$ 当 $n>N$ 时, $a_n=\frac{\ln(1+n)}{n^\beta}\cdot\frac{1}{n^{1+\beta}}<\frac{1}{n^{1+\beta}}$ 而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\beta+1}}$ 收敛 $\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛

$\therefore$ 综上, $0<\alpha\le 1$, $\therefore$ 绝对收敛.

例4. 设 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx$. 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛.

$a_n \overset{x=u+n\pi}{=\!=\!=} (-1)^n\int_0^\pi \frac{\sin u}{u+n\pi}du$ 记 $b_n=\int_0^\pi\frac{\sin u}{u+n\pi}du>0$ $\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 交错级数

$b_n-b_{n+1}=\int_0^\pi\left[\frac{1}{u+n\pi}-\frac{1}{u+(n+1)\pi}\right]\sin u\,du>0$ $\therefore \{b_n\}\downarrow$

$0<b_n=\int_0^\pi\frac{\sin u}{u+n\pi}du<\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\sin u\,du=\frac{2}{n\pi}$ $\therefore \lim_{n\to+\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$ 由 Leibniz 判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

又 $|a_n|=\int_0^\pi\frac{\sin u}{u+n\pi}du>\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi\sin u\,du=\frac{2}{(n+1)\pi}$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)\pi}$ 发散 $\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 发散 $\therefore$ 条件收敛.

3. 级数的重排: 定义: 设 $f:N^+\to N^+$ 的一一映射. $\forall k\in N$. 记 $f(k)=n_k$. 称 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_{n_k}$ 为 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的重排. 显然 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也是 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_{n_k}$ 的重排.

性质: 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛, 其和为 S. 则任意重排后得到的级数也收敛, 且其和不变.

先证正项级数重排后所得级数收敛, 且其和不变.

记正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=S$ 部分和 S_n. 重排级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_{n_k}$ 通项 $a_{n_k}\triangleq b_k$.

部分和 $T_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$.

令 $m_k=\max\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}$ 则 $T_k=b_1+\cdots+b_k=a_{n_1}+\cdots+a_{n_k}$

$\le a_1+\cdots+a_{m_k}=S_{m_k}\le S$. $\therefore \sum_{k=1}^{+\infty}a_{n_k}$ 收敛

记 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_{n_k}=T$ $\therefore T\le S$

又 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也是 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_{n_k}$ 重排 $\therefore S\le T$ $\therefore S=T$.

再证对绝对收敛级数也成立.

设 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛. 记 $a_n^+=\frac{1}{2}(|a_n|+a_n)$. $a_n^-=\frac{1}{2}(|a_n|-a_n)$.

显然 $a_n^+ \geq 0$, $a_n^- \geq 0$（正项） 且 $a_n^+ \leq |a_n|$, $a_n^- \leq |a_n|$（比较判别）

$\therefore$ 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ 都收敛 且 $a_n = a_n^+ - a_n^-$

$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$

记 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 重排后新级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'$ 对应 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^-$

分别为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ 重排,

由上知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$

$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

即绝对收敛级数重排后所得级数依然收敛,其和不变.

注:条件收敛级数没有重排性. $\forall A$, $\exists \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$ s.t. $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n_k} \to A$.

简证: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$

$\because \sum a_n$ 条件收敛 $\therefore \sum a_n^+ \to +\infty$ $\therefore \exists \sum_1 a_{n_k}^+ > A$

又 $\sum a_n^- \to +\infty$ $\therefore \exists \sum a_{n_k}^-$ s.t. $\sum_1 a_{n_k}^+ - \sum_2 a_{n_k}^- < A$

又 $a_n \to 0$ $\therefore \left|\sum_1 - \sum_2 + \sum_3 - \sum_4 + \cdots + (-1)^{n-1}\sum_n - A\right| \downarrow$ (越来越精细)

4. Abel与Dirichlet判别法: Abel变换: 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 部分和 A_n, B_n. 则 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$

补充定义 $B_0 = 0$ (统一 $b_n = B_n - B_{n-1}$, $n \in N^*$)

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1}$ ($k=1$ 时 $B_0=0$)

$\overset{\text{易得}}{=} a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k$

$= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$

注① 不要求 $\{a_n\}$ 单调. (要求 $\{a_n\}$ 单调是为了 $a_k - a_{k+1}$ 保号, 从而在脱去

绝对值后正项抵消. 配合 $B_k < M$ 进一步估计)

② B_k 可取 $\sum_{i=1}^{k} b_{m+i}$ (配合 Cauchy 形式)

Abel引理: 设 $\{a_n\}$ 与 $\sum_{i=1}^{+\infty} b_n$ 部分和 $\{B_n\}$ 满足

(1) $\{a_n\}$单调且 $\exists A>0$. $\forall n\in N$: $|a_n|\le A$

(2) $\exists \varepsilon>0$. $\forall n\in N^+$: $|B_n|\le \varepsilon$.

则 $\forall n\in N^+$. $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|\le 3A\varepsilon$

证明: $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \overset{\text{Abel变换}}{=\!=\!=} |a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k|$

$\le |a_nB_n| + |\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k|$

$\le |a_nB_n| + \sum_{k=1}^{n-1}|(a_k-a_{k+1})B_k|$

$\le |a_nB_n| + \sum_{k=1}^{n-1}|a_k-a_{k+1}||B_k|$

$\le A\varepsilon + \varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}|a_k-a_{k+1}|$

$\overset{\text{单调}}{=\!=\!=} A\varepsilon+\varepsilon|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})| = A\varepsilon+\varepsilon|a_1-a_n|\le 3A\varepsilon$

Abel判别法: 设$\{a_n\}$单调有界. $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛 则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$收敛.

证明: $\because \{a_n\}$单调有界 $\therefore \exists M>0$. $\forall n\in N^+$. $|a_n|\le M$

$\because \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛 $\therefore$由Cauchy收敛准则知

$\forall \varepsilon>0$. $\exists N>0$. $\forall n>N$时. $\forall p\in N^+$ 有 $|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k|<\varepsilon$

$\therefore |\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}b_{n+k}| = |\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(B_{n+k}-B_{n+k-1})|$ (记 $B_k=\sum_{i=1}^{k} b_{n+i}$)

$= |a_{n+p}B_{n+p} + \sum_{k=1}^{p}(a_{n+k}-a_{n+k+1})B_{n+k}|$ 并定义$B_0=0$.

$\le M\varepsilon + 2M\varepsilon = 3M\varepsilon$

由Cauchy收敛准则知. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$收敛.

例. 假设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛. 判断下列级数是否收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$ $(p>0)$. (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n+1}}$

(1) 记 $b_n=\frac{1}{n^p}$ $\because p>0$ $\therefore \{b_n\}\downarrow$ 且 $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$

$\therefore \{b_n\}$有界. 又 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛. $\therefore$由Abel判别法知 收敛.

(2) 记 $b_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\therefore \{b_n\}\downarrow$ 且 $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$

$\therefore \{b_n\}$ 有界 又 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\therefore$ 由Abel判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n+1}}$ 收敛

Dirichlet判别法：设 $\{a_n\}$ 单调且 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$，$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 部分和有界，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛

证明：$\because \lim_{n\to\infty} a_n=0$ $\therefore \forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N: |a_n|<\varepsilon$

又 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 部分和 B_n 有界 $\therefore \exists M>0, \forall n\in N^+: |B_n|\le M$

由Abel变换得 $\forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, p\in N^+$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|a_{n+p}B_{n+p} - \underbrace{a_{n+1}B_n}_{\text{补充定义}B_0} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k-a_{k+1})B_k\right|$$

$$\le 2M\varepsilon + M\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k-a_{k+1})\right| = 2M\varepsilon + M|a_{n+1}-a_{n+p}|$$

$$\le 4M\varepsilon \qquad \therefore \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \text{ 收敛}$$

例1：证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$ $\forall x\in(0,2\pi)$ 上条件收敛。

记 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\sin nx$，则 $\{a_n\}\downarrow$ 且 $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$

又 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx$ 部分和 B_n 满足 $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos(k-\tfrac{1}{2})x - \cos(k+\tfrac{1}{2})x\right) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \le \frac{2}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$\therefore \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$（此时 x 取固定值）。$\therefore \{B_n\}$ 有界

由Dirichlet判别法知 收敛。

同理 $\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{x}{2} - \sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$

$\therefore \left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ $\therefore \{B_n\}$ 有界 由Dirichlet判别法知 收敛

（另：欧拉公式 $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n} (\cos kx + i\sin kx) = \frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$）

又 $\frac{|\sin nx|}{n} \underset{(\sin nx\le 1)}{\ge} \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1-\cos 2nx}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛 $\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ 发散 $\therefore$ 条件收敛

同理 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 条件收敛

例2：设 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛。

联系：$a_n = \frac{1}{n}\cdot n a_n$

$\because \sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛 $\{\frac{1}{n}\}\downarrow$ 且 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ 而 $a_n=na_n\cdot\frac{1}{n}$

由Dirichlet判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛.

例3. $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散. 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{n})x_n$ 也发散

令 $y_n=(1+\frac{1}{n})x_n$ 则 $x_n=\frac{n}{n+1}y_n$

反证法(证明收敛手段多于发散) 假设 $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ 收敛.

$\because \{\frac{n}{n+1}\}$ 单调有界 $\therefore$ 由Abel判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛 矛盾! $\therefore$ 发散.

例4 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{\cos n}{n}$ 收敛.

令 $a_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$. $b_n=\cos n$ 则 $a_n>a_{n+1}$ (递减数列平均数也递减)

又 $\ln(n+1)\le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$

而 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\ln n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}=0$ $\therefore \lim_{n\to+\infty}a_n=0$ $\therefore \{a_n\}\downarrow$ 且 $a_n\to 0$.

$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}\cos k=\frac{\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{1}{2}\cos k}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})-\sin(k-\frac{1}{2}))}{2\sin\frac{1}{2}}$

$=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$ $\therefore |\sum_{k=1}^{n}b_k|=\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\right|<\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} b_k$ 部分和有界 由Dirichlet收敛定理知 收敛.

例5. 设 $a_n>0$. 且 $\sum a_n$ 发散. 判断 $\sum\frac{a_n}{a_n+1}$ 是否收敛.

联系: 记 $b_n=\frac{a_n}{a_n+1}\in(0,1)$ $\therefore a_n=\frac{b_n}{1-b_n}$

反证 若 $\sum b_n$ 收敛 则 $\lim_{n\to+\infty}b_n=0$ $\therefore \exists N>0$. $\forall n>N$. $0<b_n<\frac{1}{2}$.

$\therefore 0<a_n=\frac{b_n}{1-b_n}<2b_n$ $\therefore \sum a_n$ 收敛 矛盾.

$\therefore \sum\frac{a_n}{a_n+1}$ 发散.

§2 上极限与下极限

1. 聚点: 由Weierstrass定理知, 有界数列一定存在收敛子列. 即$\{a_n\}$有界, 则$\exists$子列$\{a_{n_k}\}$

s.t. $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=\xi$, 则称$\xi$为$\{a_n\}$的一个极限点(聚点).

1.任意邻域有无穷多项,
2.无穷多值,
3.子数列的极限
(加 互异).

性质: ξ为$\{a_n\}$的一个极限点 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\{a_n\}$中无穷多项$\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$.

注: 数列聚点: 无穷多项(大小不一定互异). 点集聚点: 无穷多数(互异) ($S\subseteq\mathbb{R}$, ξ为S聚点 $\Leftrightarrow$ $\exists\{x_n\}\subset S$, $\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$, $x_n\neq\xi$)

若$\{a_n\}$有界, 则$E=\{\xi\mid\xi$为$\{a_n\}$极限点$\}$有界. $\therefore E$存在上下确界. 记$H=\sup E$, $h=\inf E$.

定理: 对于有界数列$\{a_n\}$, $H=\max E$, $h=\min E$.

证明: 假设$H\notin E$, 则$\exists\,\xi_k\in E$ $(k=1,2,\cdots)$ s.t. $\lim_{k\to\infty}\xi_k=H$

取$\varepsilon_1=1$ $\because\xi_1$为$\{a_n\}$聚点, $\therefore U(\xi_1,\varepsilon_1)$中有$\{a_n\}$无穷多项. 取$a_{n_1}\in U(\xi_1,\varepsilon_1)$.

取$\varepsilon_2=\frac{1}{2}$. $\because\xi_2$为$\{a_n\}$聚点 $\therefore U(\xi_2,\varepsilon_2)$中有$\{a_n\}$无穷多项. 取$n_2>n_1$, $a_{n_2}\in U(\xi_2,\varepsilon_2)$

...

$\therefore$对$\varepsilon_k=\frac{1}{k}$, $\exists n_k>n_{k-1}$, $a_{n_k}\in(\xi_k,\varepsilon_k)$. 得到子列$\{a_{n_k}\}$满足$|a_{n_k}-\xi_k|<\frac{1}{k}$

$\therefore\underline{\lim_{k\to\infty} a_{n_k}}=\lim_{k\to\infty}\xi_k=\underline{H}$ $\therefore H$为$\{a_n\}$聚点 $\Rightarrow H\in E$. 矛盾 $\therefore H\in E$

2. 上极限与下极限. 定义: 聚点集E的最大值H与最小值h分别称为$\{a_n\}$的上极限与下极限. 记作$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=H$.

$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=h$.

数列极限存在的充要条件: $\{a_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\in\mathbb{R}$

证明: 必要性: $\{a_n\}$收敛 $\Rightarrow$ 任何子列均收敛且极限相等 $\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$

充分性: 反证. 若$\{a_n\}$不收敛. $\because\{a_n\}$有界 $\therefore$必存两个收敛子列且极限不相等

$\therefore\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n<\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$ 矛盾. $\therefore\{a_n\}$收敛.

注: $\{a_n\}$无上界 $\Rightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=+\infty$. $\{a_n\}$无下界 $\Rightarrow\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-\infty$.

例1. 求$\{a_n=\cos\frac{2n\pi}{5}\}$上下极限.

周期数列 $T=5$. $\therefore a_{5n+1}=a_{5n+4}=\cos\frac{2}{5}\pi$. $a_{5n+2}=a_{5n+3}=-\cos\frac{\pi}{5}$

$a_{5n}=1$ $\therefore \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n=1$. $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n=-\cos\frac{\pi}{5}$.

例2. 求 $\{a_n=n^{(-1)^n}\}$ 上下极限

$a_{2n}=2n$. $a_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}$ (奇偶讨论). $\therefore \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n=+\infty$. $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n=0$.

性质(1) 设 $\{a_n\}$ 有界. 则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n=H \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon>0.\ \exists N>0.\ \forall n>N.\ a_n<H+\varepsilon \\ \{a_n\}\text{中有无穷多项满足 } a_n>H-\varepsilon. \end{cases}$

$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n=h \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon>0.\ \exists N>0.\ \forall n>N.\ a_n>h-\varepsilon. \\ \{a_n\}\text{中有无穷多项满足 } a_n<h+\varepsilon \end{cases}$

证明: 必要性: $\because H$ 为 $\{a_n\}$ 最大聚点. $\therefore \forall\varepsilon>0$. $\{a_n\}$ 只有有限项在 $[H+\varepsilon,+\infty)$ 内.

否则 $\exists\{a_n\}$ 子列 收敛于 A. 且 $A\geq H+\varepsilon$.

又 H 为 $\{a_n\}$ 聚点. $\therefore \{a_n\}$ 中有无穷多项属于 H 的 ε 邻域

$\therefore \{a_n\}$ 中存在无穷多项. s.t. $a_n>H-\varepsilon$.

充分性: $\because \forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. $\forall n>N$. $a_n<H+\varepsilon$

$\therefore \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n\leq H+\varepsilon$. 由 ε 任意性知 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n\leq H$.

又 $\{a_n\}$ 中无穷多项满足 $a_n>H-\varepsilon$. $\therefore \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n\geq H-\varepsilon$

由 ε 任意性知 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n\geq H$ $\therefore$ 综上. $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n=H$.

(2) 设有界数列 $\{x_n\}$. $\{y_n\}$. 则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(x_n+y_n)\leq \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n+\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$ (不是同时取到, 分开取更大).

$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(x_n+y_n)\geq \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n+\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$

若 $\{x_n\}$ 收敛. 则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n+\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$. $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n+\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$

(3) 设有界数列 $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ 且 $x_n\geq0$. $y_n\geq0$. 则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(x_n\cdot y_n)\leq \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$

$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(x_n\cdot y_n)\geq \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n\cdot\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$

若 $\{x_n\}$ 收敛. 则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$. $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\cdot\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$

(4) 设 $a_n>0$. 则 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leq\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leq\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (比值判别法能用, 根值一定能用,

根值能用, 比值不一定能用) ($\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ / $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}$ 不存在时. 判断上极限 <1 / 下极限 >1).

例. $a_n=\frac{3+(-1)^n}{2^n}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}\cdot\frac{1}{2}$

$\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2}$

l 比值 $=\frac{1}{4}$. L 比值 $=1$ 不能用

l 根值 $=L$ 根值 $=\frac{1}{2}$ 能用

§1 函数项级数的一致收敛性

1. 函数列的极限函数：设 $f_n(x)$ 是一列定义在数集 E 上的函数，称 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上的函数列。

$\forall x_0\in E$，若数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛，则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 处收敛，x_0 称为函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点，所有收敛点组成的集合 D 称为该函数列的收敛域

$\forall x\in D$，由于 $\{f_n(x)\}$ 收敛，必有唯一的极限值与之对应，这样就定义了 D 上的函数 $f(x)$，称 $f(x)$ 为 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)\ (x\in D)$。

$\therefore$ 对每个固定的 $x\in D$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$。

2. 函数项级数的和函数：设 $\{u_n(x)\}$ 是 E 上函数列，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 称为定义在 E 上的函数项级数。

称 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k(x)$ 为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 部分和函数

若对 $x_0\in E$，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 的收敛点，所有收敛点组成的集合称为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 的收敛域。

例1. 设 $f_n(x)=x^n$，则 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$

$\{f_n(x)\}$ 收敛域 $(-1,1]$，$\{f_n(x)\}$ 在 $(-1,1]$ 连续，但 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续

$\because \lim\limits_{x\to1-0}f_n(x)=1\quad \lim\limits_{x\to1-0}f(x)=0\quad \lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to1-0}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0,\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to1-0}f_n(x)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1-0}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to1-0}f_n(x)$

注. 极限符号之间不一定可交换，函数列连续但其极限函数未必连续

(下研究函数项级数的分析性质，由 S_n 构造 u_n) 记 $u_n(x)=x^n-x^{n-1}$，

$S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k(x)=x^n=f_n(x)$，$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & x=1\end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\neq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to1-0}u_n(x)$

注：$\lim$ 与 Σ 不一定可交换，无限多个函数和的极限未必等于极限的和（无穷多个连续函数的和不一定连续）

3. 函数列与函数项级数的一致收敛：

$N(\varepsilon)$，与 x 无关

函数列的一致收敛：设 $\{f_n(x)\}$ 与 $f(x)$ 均定义在 D 上，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$\forall x\in D$ 均有

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)$，记作 $f_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows}f(x)$。

函数列的非一致收敛：$\{f_n(x)\}$ 在 D 上不一致收敛于 $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathbb{N}$，$\exists n_0>N$，

$\exists x_0\in D$ s.t. $|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0$

例：设 $f_n(x)=x^n$ 在 $(0,1)$ 内收敛于 $f(x)=0$，但非一致收敛。

$f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内闭一致收敛，1 破坏一致收敛 $\Rightarrow$ 在 1 附近取点

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall N\in\mathbb{N}$，取 $n_0>N\geq 3$，存 $x_0=(1-\frac{1}{n_0})^{\frac{1}{n_0}}\in(0,1)$

有 $|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|=f_{n_0}(x_0)=1-\frac{1}{n_0}>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$

（另：取 $x_0=1-\frac{1}{n_0}$，$\therefore|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|=(1-\frac{1}{n})^n\to\frac{1}{e}>\frac{1}{4}$）。

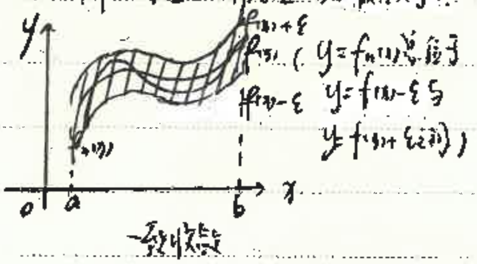
$\therefore\{x^n\}$ 在 $(0,1)$ 内非一致收敛于 $f(x)=0$

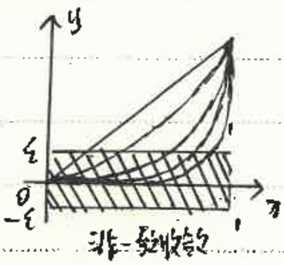
变式：证明 $\forall[\alpha,\beta]\subset(0,1)$，$\{f_n(x)\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上均一致收敛于 0

$\because 0<\beta<1$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\beta^n=0$ $\therefore\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$|\beta^n-0|<\varepsilon$

$\therefore\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$\forall x\in[\alpha,\beta]$ 均有 $|f_n(x)-0|=x^n\leq\beta^n<\varepsilon$

$\therefore\{f_n(x)\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 0





注：$\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 的任何内闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，称之为内闭一致收敛。

（一致连续研究闭区间：闭区间连续则一定一致连续）。

函数项级数的一致收敛：对于 D 上的 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$，其部分和函数列为 $S_n(x)$，若 $\{S_n(x)\}$ 在

D上一致收敛于 $S(x)$，则称 $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在 D上一致收敛于 $S(x)$.

(另：$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\{r_n(x)\}$ 一致收敛到 0.

其中 $r_n(x)$ 为 $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 的余项 即 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ (误差)

$\therefore \forall\varepsilon>0.\ \exists N>0.\ \forall n>N.\ \forall x\in D.\ |r_n(x)|<\varepsilon$).

例1. 对于 $f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $(x\in\mathbb{R})$. 极限函数 $f(x)=0$. 又 $|f_n(x)-0|\le\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\therefore \{f_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 0.

但 $f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx$. $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(0)=+\infty$

$\therefore x=0$ 处 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}[f_n(x)]\ne\frac{d}{dx}[\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)}_{\text{常数}}]$

注：即使 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛，其导函数列不一致收敛，$\lim$ 与 $\frac{d}{dx}$ 不一定可交换.

例2. 证明 $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 内非一致收敛

设部分和函数 $S_n(x)$. 和函数 $S(x)$

$\therefore S_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$. $S(x)=\frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)\Rightarrow |S_n(x)-S(x)|=\frac{x^n}{1-x}$ (误差)

$\forall n\in\mathbb{N}.\ (n\ge2).\ 1-\frac{1}{n}\in(-1,1)$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}n(1-\frac{1}{n})^n=+\infty$

$\therefore \exists\varepsilon_0=1.\ \forall N\in\mathbb{N}^+.\ \exists n>N\ s.t.\ n(1-\frac{1}{n})^n>\varepsilon_0=1$

$\therefore |S_n(x)-S(x)|_{x=1-\frac{1}{n}}=n(1-\frac{1}{n})^n>\varepsilon_0=1$ $\therefore$ 非一致收敛.

($|x|<1$ 时 $r_n(x)=x^n+x^{n+1}+\cdots=\frac{x^n}{1-x}$)

变式. 证明 $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 任何闭子区间上均一致收敛 (内闭一致收敛)

记 $a=\max\{|\alpha|,|\beta|\}\in(0,1)$. $\forall x\in[\alpha,\beta]$

$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ 部分和函数 $S_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$. 和函数 $S(x)=\frac{1}{1-x}$

$\therefore |S_n(x)-S(x)|=\frac{x^n}{1-x}\le\frac{a^n}{1-a}\to0$ ($\frac{x^n}{1-x}$ 在 $(-1,1)$ ↗)

$\therefore \forall\varepsilon>0\ (0<\varepsilon<\frac{a}{1-a}).\ \exists N=[\log_a(1-a)\varepsilon].\ \forall n>N.\ |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$

§2 一致收敛级数的判别与性质

1. 函数列一致收敛的柯西准则：$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛的充要条件是$\forall \varepsilon>0, \exists N\in N^+, \forall n>N, \forall p\in N^+, \forall x\in D$, 均有 $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

证明：必要性：设$f_n(x)$在D上一致收敛于$f(x)$，则$\forall \varepsilon>0, \exists N\in N^+, \forall n>N, \forall x\in D$,

$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore \forall p\in N^+, \forall x\in D, |f_{n+p}(x)-f_n(x)| \le |\underbrace{[f_{n+p}(x)-f(x)]}-\overset{\text{配凑}}{\underbrace{[f_n(x)-f(x)]}}|$

$< |f_{n+p}(x)-f(x)| + |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$

充分性：①固定x找$f(x)$.

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in N^+, \forall n>N, \forall p\in N^+, \overset{\text{固定}x}{\underline{\forall x\in D}}, |f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

由数列极限Cauchy收敛准则知$\{f_n(x)\}$收敛，记极限为$f(x)$

② 固定n，$\underline{令p\to+\infty\ (找f(x))}$ （先说明极限存在，才能取极限）

$\forall n>N, \forall x\in D, |f(x)-f_n(x)|\le\varepsilon$，由函数列一致收敛定义知，

$(p\to+\infty, < \to \le)$

$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)$.

2. 一致收敛的确界判别法：$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$

证明：必要性，设$f_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$，则$\forall \varepsilon>0, \exists N\in N^+, \forall n>N, \forall x\in D$,

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

由上确界定义知 $\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$ （误差上确界趋于0）

充分性：$\because \lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists N\in N^+, \forall n>N, \sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

又$\forall x\in D$, $\underline{|f_n(x)-f(x)|\le \sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon}$ $\therefore f_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$

注：$f_n(x)\rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow$ 误差$|f_n(x)-f(x)|\rightrightarrows 0$.

3. 函数项级数一致收敛的柯西准则：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛的充要条件是$\forall\varepsilon>0, \exists N\in N^+$,

$\forall n>N,\ \forall p\in N^+,\ \forall x\in D$，均有 $|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$.

注：取 $p=1$ 得到 $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 一致收敛的必要条件：

$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛 $\Rightarrow \{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0

4. 函数项级数一致收敛的确界判别法：假设 $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在 D 上和函数为 $S(x)$，称 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ 为 $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 的余项或误差. $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)$ 当且仅当

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}|r_n(x)|=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0.$$

例1. 证明 $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 内非一致收敛.

$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ 部分和函数 $S_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$，和函数 $S(x)=\frac{1}{1-x}\ (-1<x<1)$

则 $\underline{r_n(x)}=S(x)-S_n(x)=\frac{x^n}{1-x}\ (-1<x<1)$ （找误差）

$\because \lim_{n\to+\infty}\sup_{-1<x<1}|r_n(x)|\geq\lim_{n\to+\infty}r_n\left(\frac{n-1}{n}\right)$ （1附近打破一致收敛；sup 大于任意取值）

$=\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=+\infty$ $\therefore$ 非一致收敛

例2. 证明 $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

当 $x=0$ 时，$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$

当 $x\neq0$ 时，$\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|=\left|\frac{1}{\frac{1}{x}+n^2x}\right|\leq\frac{1}{2n}$（基本不等式） $\therefore\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$

$\therefore\{f_n(x)\}$ 极限函数 $f(x)=0\ (\forall x\in\mathbb{R})$ → 基本不等式取最值

$\because\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|x|}{1+n^2x^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$ $\therefore$ 一致收敛于 0.

例3. $f_n(x)=nxe^{-nx^2}\ (n=1,2,\cdots)$，讨论 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

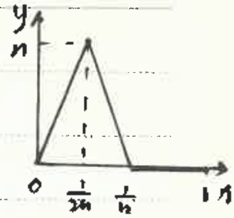
$\forall x>0$，$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}nxe^{-nx^2}=0$ $\therefore f(x)=0$.

求 sup：记 $g(x)=nxe^{-nx^2}$，$g'(x)=n(1-2nx^2)e^{-nx^2}=0\Rightarrow x_0=\frac{1}{\sqrt{2n}}$

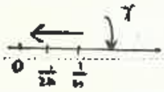
$\therefore x=x_0$ 时 $g(x)_{max}=g(x_0)=\sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore\lim_{n\to+\infty}\sup_{0\leq x<+\infty}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}}=+\infty$ $\therefore$ 非一致收敛

例4. 定义在 $[0,1]$ 上的函数列 $f_n(x)=\begin{cases}2n^2x, & 0\leq x\leq\frac{1}{2n}\\ 2n-2n^2x, & \frac{1}{2n}<x\leq\frac{1}{n}\\ 0, & \frac{1}{n}<x\leq1\end{cases}$，证明：$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛



$\because f_n(0)=0$. $\therefore f(0)=0$.

当 $x\in(0,1]$ 时. $\exists n\in N$ s.t. $x>\frac{1}{n}$  $\therefore \forall n>N$. $f_n(x)=0$

$\therefore f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

又 $f_n(x)$ 在 $x=\frac{1}{2n}$ 处取最大值. 且 $f_n(\frac{1}{2n})=n$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{0\le x\le1}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{0\le x\le1}|f_n(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$. $\therefore$ 非一致收敛

注: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2}\ne\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx=0$ $\therefore$ 序函数连续,极限函数连续,但 $\lim$ 与 $\int$ 不能交换

5. 函数项级数一致收敛的魏尔斯特拉斯判别法: 设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 是定义在D上的函数项级数. 若存在正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$

满足 (1) $\exists n_0\in N^+$. $\forall n>n_0$. $\forall x\in D$ 有 $|u_n(x)|\le a_n$. (2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛.

则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在D上一致收敛.

证明: $\because \sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\therefore$ 由Cauchy收敛准则知. $\forall\varepsilon>0$. $\exists N>n_0>0$. $\forall n>N$. $\forall p\in N^+$.

有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

由(1). $\forall x\in D$. $|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\le|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|$

$\le a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

$\therefore \sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在D上一致收敛.

注: 若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 与正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}M_n$ 满足 $|u_n(x)|\le M_n$ ($\forall x\in D$. $n>n_0$). 且 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}M_n$ 收敛.

则称 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}M_n$ 为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 的优级数 (Weierstrass判别法也称优级数判别法或M判别法)

例: 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

$\forall x\in\mathbb{R}$. $|\frac{\sin nx}{n^2}|\le\frac{1}{n^2}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. 由优级数判别法知一致收敛.

例: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[f(x)]^n$ 在 $[0,1]$ 处处收敛. 求证 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|f(x)|^n$ 在 $[0,1]$ 绝对收敛

且一致收敛. 几何级数

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[f(x)]^n$ 部分和函数 $S_n(x)=\frac{1-[f(x)]^{n+1}}{1-f(x)}$ $\because \sum\limits_{n=1}^{+\infty}[f(x)]^n$ 收敛.

$\therefore \forall x\in[0,1]$. $|f(x)|<1$. 又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\therefore M=\max\limits_{0\le x\le1}|f(x)|<1$

$\forall x\in[0,1]$ $|f(x)|\le M<1$ $\therefore |[f(x)]^n|\le M^n$ 而 $\sum_{n=1}^{n} M^n$ 收敛
($|f(x)|<1$) ($|f(x)|\le m$)
$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}[f(x)]^n$ 绝对收敛, 且一致收敛.

6. Abel判别法. 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 满足 (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛 (2) $\forall x\in D$, $\{v_n(x)\}$ 单调. (关于n)

(3) $\{v_n(x)\}$ 在 D 上一致有界. 即 $\exists M>0$, $\underline{\forall n\in N, \forall x\in D}$ 有 $|v_n(x)|\le M$ (共同的界) (可调换)

则 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

证明: $\because \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛. 由Cauchy收敛准则知. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N>0$. $\forall n>N$, $\forall p\in N^+$.

$\forall x\in D$, 有 $|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$ (记 $U_k(x)=\sum_{i=1}^{k}u_{n+i}(x)$, 规定 $U_0(x)=0$ $\therefore$ 当 $n>N$ 时 $|U_k(x)|<\varepsilon$)

由(2)(3)知. $\exists M>0$. $\forall n\in N$. $\forall x\in D$. 有 $|v_n(x)|\le M$.

Abel变换: $|u_{n+1}(x)v_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)v_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)v_{n+p}(x)|=\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)\right|$

$=\left|\sum_{k=1}^{p}(U_k(x)-U_{k-1}(x))v_{n+k}(x)\right|=\left|U_p(x)v_{n+p}(x)+\sum_{k=1}^{p-1}(v_{n+k}(x)-v_{n+k+1}(x))U_k(x)\right|$

$\le M\varepsilon+\varepsilon\sum_{k=1}^{p-1}|v_{n+k}(x)-v_{n+k+1}(x)|\le 3M\varepsilon$ $\therefore$ 一致收敛.

7. Dirichlet判别法: 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 满足 (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致有界. 即

$\exists M>0$. $\forall x\in D$. $\forall n\in N^+$ 都有 $|S_n(x)|\le M$. (2) $\forall x\in D$. $\{v_n(x)\}$ 单调 (关于n) (3) $\{v_n(x)\}$ 在 D 上一致趋于0

则 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 D 上一致收敛

例: 证明: $\forall\alpha\in(0,\pi)$. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\alpha,2\pi-\alpha]$ 一致收敛.

记 $u_n(x)=\cos nx$. $v_n(x)=\frac{1}{n}$

$\therefore S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x)$

$=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$ $\therefore \forall x\in[\alpha,2\pi-\alpha]$. $\forall n\in N^+$. $|S_n(x)|\le\frac{2}{|2\sin\frac{x}{2}|}\le\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (α给定)

即 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\cos nx$ 部分和函数在 $[\alpha,2\pi-\alpha]$ 上一致有界

又 $v_n(x)=\frac{1}{n}$ 在 $[\alpha,2\pi-\alpha]$ 上单调递减, 一致收敛于0. 由Dirichlet判别法知一致收敛.

试: 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $(0,2\pi)$ 内非一致收敛.

法一. 证非一致 → 充分条件不可用 + 和函数无法求 ⇒ Cauchy

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$，$\forall N\in\mathbb{N}$，$\exists n_0>N$，$\exists p_0=n_0$，$\exists x_0=\frac{\pi}{8n_0}$ （取 $p_0=n_0$；统一分母；找 x_0）

当 $n_0+1\le k\le 2n_0$ 时 $0<kx_0\le\frac{\pi}{4}$ ∴ $\cos kx_0\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ （$(0,2\pi)$ 附近破坏一致收敛 在0附近取值）

∴ $\left|\sum\limits_{k=n_0+1}^{2n_0}\frac{\cos kx_0}{k}\right|\ge\left|\sum\limits_{k=n_0+1}^{2n_0}\frac{\cos kx_0}{2n_0}\right|\ge\sum\limits_{k=n_0+1}^{2n_0}\frac{1}{2n_0}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}>\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ ∴非一致收敛

法二. 分析性质 由Dirichlet判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $(0,2\pi)$ 内收敛

设其部分和 $S_n(x)$ 和函数 $S(x)$

若一致收敛 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to0^+}S_n(x)$ 存在（0为聚点）

$\lim\limits_{x\to0^+}S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\triangleq a_n$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ 存在

但 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ 发散 矛盾！ ∴非一致收敛

3. 一致收敛函数列与函数项级数的性质：

1) 可交换：设 $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 内一致收敛于 $f(x)$，且 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=a_n\in\mathbb{R}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且相等

证明：先证 $\{a_n\}$ 收敛 ∵ $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 内一致收敛于 $f(x)$ （找极限）

∴由Cauchy收敛准则知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}$，$\forall x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$

有 $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

令 $x\to x_0$ 则 $|a_{n+p}-a_n|\le\varepsilon$ ∴ $\{a_n\}$ 为Cauchy列，收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\in\mathbb{R}$

下证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$　函数极限，找δ　$|f(x)-A|=|\overset{一联系}{\underbrace{(f(x)-f_n(x))}_{提供N}}+\overset{一联系}{\underbrace{(f_n(x)-a_n)}_{函数极限,提供\delta}}+\overset{一联系}{\underbrace{(a_n-A)}_{提供N}}|$ （找联系证极限）

找N：∵ $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 内一致收敛于 $f(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

∴ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$\forall x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$，有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$，$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{3}$

找δ：对某一个 $n>N$，$\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=a_n$　取定 $n>N$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall 0<|x-x_0|<\delta$ 有 $|f_n(x)-a_n|<\frac{\varepsilon}{3}$

∴ $\forall 0<|x-x_0|<\delta$ 有 $|f(x)-A|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-a_n|+|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

∴ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

注：$\{f_n(x)\}$ 一致收敛时，$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$ 极限符号之间可交换

连续性：若 $\{f_n(x)\}$ 在D上一致收敛且 $f_n(x)$ 在D上连续，则 $f(x)$ 在D上连续

证明：$\forall x_0\in D$，$\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=f_n(x_0)\triangleq a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$

∴ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\overset{\boxed{已证可交换}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$

应用：反证非一致收敛

例1 证明 ζ函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上非一致收敛

反证法：若 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致收敛，设部分和函数 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}$

1附近破坏一致收敛: $\lim\limits_{x\to 1+0} S_n(x) = S_n(1) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\in\mathbb{R}$

由上知 $\lim\limits_{x\to 1+0} S_n(x)$ 存在 但 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散 ∴非一致收敛

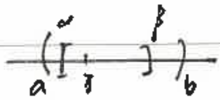
变式: 证明 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内闭一致收敛

$\forall[\alpha,\beta]\subseteq(1,+\infty)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^\alpha}$ (优级数)

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 收敛 ∴ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛 ∴内闭一致收敛

推论: (1) 若连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上极限函数 $f(x)$ 不连续, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上非一致收敛

(2) 若连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上内闭一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在 D 上连续



∵内闭一致收敛 ∴ $\forall x\in(a,b)$, $\exists\alpha,\beta\in(a,b)$ s.t. $x\in[\alpha,\beta]\subset(a,b)$

(任意 x 都被连续区间覆盖 $\Rightarrow$ $f\in C(a,b)$)

(3) 若 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内一致收敛.

1° 若 $\lim\limits_{x\to a+0} f_n(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a+0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a+0}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

2° 若 $\lim\limits_{x\to b-0} f_n(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to b-0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to b-0}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

例2. 设 $f_n(x)=x^n$, 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & x=1\end{cases}$

$\{f_n(x)\}$ 在 $(-1,1]$ 连续, $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, $\Rightarrow$ $f_n(x)\overset{(-1,1]}{\not\rightrightarrows} f(x)$

但 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛 ∴ $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 连续

可积性: 若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛, 且每项都连续, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

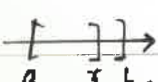
证明: ∵ $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)\in C[a,b]$

∴ $f(x)\in C[a,b]$ ∴ $f_n(x)$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 均可积

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, $\forall n>N$, $\forall x\in[a,b]$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

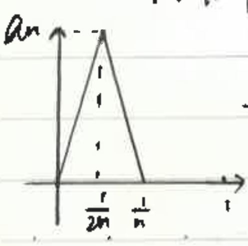
∴ $\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f_n(x)dx\right|\le\int_a^b|f_n(x)-f(x)|dx\le(b-a)\varepsilon$

∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$ (lim 与 $\int$ 可交换)



由上知当 $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ 时, $\int_a^x f_n(t)dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)dt$ (变限)

例. 设 $f_n(x)=\begin{cases}2na_nx, & 0\le x\le\frac{1}{2n}\\ 2a_n-2na_nx, & \frac{1}{2n}<x\le\frac{1}{n}\\ 0, & \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$ $a_n>0$.



$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0$.

lim 与 $\int$ 可交换 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{2n} = 0$

一致收敛 ⟺ $\lim_{n\to+\infty}\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)-f(x)|=0$

⟺ $\lim_{n\to+\infty}|f_n(x)|\big|_{x=\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} a_n=0$.

∴一致收敛是极限与∫可交换的充分不必要条件 如取 $a_n=\sqrt{n}$ 此时 $\lim_{n\to+\infty} a_n\neq 0$ 但 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{2n}=0$
原函数列不一致收敛（某点）

可微性：设$\{f_n(x)\}$是定义在$[a,b]$上的函数列 若$x_0\in[a,b]$为$\{f_n(x)\}$的收敛点，$f_n(x)$每一项在$[a,b]$上有连续导数，且$\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛 则 $\frac{d}{dx}(\lim_{n\to+\infty}f_n(x))=\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}(f_n(x))$.
导函数列一致收敛

思路：$f_n(x)=\int_a^x \underbrace{f_n'(t)dt}_{可积：连续} + f_n(a) \xrightarrow{收敛} A$ ∴取$a=x_0$.
可积：一致收敛

证明：设$\lim_{n\to+\infty}f_n(x_0)=A\in\mathbb{R}$. $f_n'(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$.

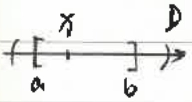
∴$\forall x\in[a,b]$. $f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^x f_n'(t)dt$

令$n\to+\infty$. ∴ $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=A+\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^x f_n'(t)dt \overset{可交换}{=} A+\int_{x_0}^x g(t)dt$

两边求导 得 $f'(x)=g(x)$. 即 $\frac{d}{dx}(\lim_{n\to+\infty}f_n(x))=\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}(f_n(x))$

推论：定义在D上的$\{f_n(x)\}$，若x_0为其收敛点且$\{f_n'(x)\}$在D上内闭一致收敛 则 $f(x)$在D可导且
$\frac{d}{dx}(\lim_{n\to+\infty}f_n(x))=\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}(f_n(x))$

证明：∵$\{f_n'(x)\}$在D上内闭一致收敛 ∴$\forall x\in D$, $\exists[a,b]\subseteq D$



s.t. $x_0\in[a,b]$（收敛点），$x\in[a,b]$（一致收敛区间覆盖）

∴ $f_n'(x)$在$[a,b]$一致收敛. $f(x)$可导 成立.

例1. 证明：$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$有任意阶导数

$(\frac{1}{n^x})^{(k)}=\frac{(-1)^k\ln^k n}{n^x}$（幂函数）∴ $\forall x\in\overset{内闭}{[\alpha,\beta]}\subseteq(1,+\infty)$ $|(\frac{1}{n^x})^{(k)}|\le\frac{\ln^k n}{n^\alpha}$ 优级数

∵$\alpha>1$ ∴ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^k n}{n^\alpha}$收敛 ∴ $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n^x})^{(k)}$在$[\alpha,\beta]$一致收敛.

∴ $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n^x})^{(k)}$在$(1,+\infty)$内闭一致收敛 ∴ $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$有任意阶导数

引申 用Cauchy收敛准则证明：$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上非一致收敛.

1附近破坏一致收敛. 取$x_0=1+\frac{1}{n}$.

取$\varepsilon_0=\frac{1}{4}$, $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists n_0(\in\mathbb{N})>N$. $p_0=n_0$, $x_0=1+\frac{1}{n_0}$

则 $\left|\frac{1}{(n_0+1)^{x_0}}+\frac{1}{(n_0+2)^{x_0}}+\cdots+\frac{1}{(n_0+n_0)^{x_0}}\right|\ge\frac{n_0}{(2n_0)^{1+\frac{1}{n_0}}}=\frac{1}{2n_0}\cdot\frac{n_0}{(2n_0)^{\frac{1}{n_0}}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(2n_0)^{\frac{1}{n_0}}}>\frac{1}{4}$ （$\sqrt[n]{2n}\to1$, n充分大下 $\sqrt[n]{2n}<2$）.

∴由Cauchy收敛准则知 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$非一致收敛.

例2.（绝对不一定一致）证明：$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上绝对并一致收敛，但由各项绝对值构成的级数在$[0,1]$上不一致收敛.

记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k(1-x)$ $\quad S(x)=\frac{1-x}{1+x}$ (等比数列)

余项 $|r_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k x^k(1-x)\right|\le x^{n+1}(1-x)$ (交错级数 $\{S_n\}$ 误差小于 r_n 第一项)

(求sup) $\le \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\frac{1}{n+2}\underset{(最值)}{\longrightarrow}0$ $\quad\therefore S_n(x)$ 一致收敛.

记 $T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k(1-x)=1-x^n$. $\quad T(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$ $\quad\therefore \{S_n(x)\}$ 绝对收敛.

又 $x^n(1-x)$ 连续 $T(x)$ 不连续 $\therefore \sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 非一致收敛 (绝对但不一致)

例3. (一致不一定绝对) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$, $x\in[\alpha,2\pi-\alpha]$ $\quad \alpha\in(0,\pi)$.

记 $u_n(x)=\cos nx$. $\quad v_n(x)=\frac{1}{n}$

$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\left|\frac{\sin(n+\frac12)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\le\frac{2}{2\sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ $\quad\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 部分和一致有界

$\{v_n(x)\}\downarrow$ 且 $v_n(x)\rightrightarrows 0$ 由Dirichlet判别法知一致收敛

又 $\left|\frac{\cos nx}{n}\right|\overset{|\cos nx|\le 1}{\ge}\left|\frac{\cos^2 nx}{n}\right|\overset{降次}{=}\frac{1-\cos 2nx}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n}$ 而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛

$\therefore$ 条件收敛 (一致但不绝对).

例4. 设 $S_n(x)=\frac{1}{n}\arctan(x^n)$. 则 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛. 但 $\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}(S_n(x))\ne\frac{d}{dx}(\lim_{n\to+\infty}S_n(x))$

$|S_n(x)|\le\frac{\pi}{2n}$ $\quad\therefore S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=0$

$\lim_{n\to+\infty}\sup_{0<x<+\infty}|S_n(x)-S(x)|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}=0$ $\quad\therefore \{S_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

$S'(x)=0$. $\quad S_n'(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}S_n'(1)=\frac12\ne S'(1)$ $\quad\therefore$ lim 与 $\frac{d}{dx}$ 不能交换顺序

变式: 证明 $\{S_n'(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 内非一致收敛.

$\lim_{n\to+\infty}S_n'(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & 0<x<1\\ \frac12, & x=1\\ 0, & x>1\end{cases}$ $\quad$ 记 $\lim_{n\to+\infty}S_n'(x)=S(x)$ $\quad \frac{n}{n+1}\in(0,1)$

则 $\lim_{n\to+\infty}\sup_{0<x<+\infty}|S_n'(x)-S(x)|\overset{取点}{\ge}\lim_{n\to+\infty}\left|S_n'\left(\frac{n}{n+1}\right)-S\left(\frac{n}{n+1}\right)\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|S_n'\left(\frac{n}{n+1}\right)\right|=\frac{e}{e^2+1}$

注: 函数列一致收敛 而导函数列非一致收敛时 lim 与 $\frac{d}{dx}$ 未必能交换.

例5. $f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $(x\in\mathbb{R})$. $\quad |f_n(x)|\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad\therefore \forall x\in\mathbb{R}$ $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$ $\therefore \{f_n(x)\}$ 的极限函数 $f(x)=0$.

但 $f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx$ $\quad \lim_{n\to+\infty}f_n'(0)=+\infty$ 而 $f'(0)=0$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}[f_n(x)]\ne\frac{d}{dx}[\lim_{n\to+\infty}f_n(x)]$ $\quad$ lim 与 $\frac{d}{dx}$ 未必能交换

例6. 证明: $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 内连续且有连续导函数.

要证 $f(x)$ 连续, 只需证 $\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 连续 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 一致收敛.

优级数: $\forall x\in(0,2\pi)$, $\left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right|\le\frac{1}{n^2+1}$ 而 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛 $\therefore$ 一致收敛.

又 $\forall n\in N^+$, $\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 连续 $\therefore f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 连续.

记 $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2+1}\right)'=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n\sin nx}{1+n^2}$ (前面的内闭一致收敛).

需证 $f(x)$ 可微, 只需证 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n\sin nx}{1+n^2}$ 在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛, $-\frac{n\sin nx}{1+n^2}$ 在 $(0,2\pi)$ 连续.

$\because \left\{\frac{n}{1+n^2}\right\}\downarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{1+n^2}=0$.

$\forall \delta>0\ (\delta<\pi)$, $\forall x\in[\delta,2\pi-\delta]$, $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\frac{\left|\cos(n+\frac{1}{2})x-\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$

由Dirichlet判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{1+n^2}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 一致收敛, $\therefore$ 内闭一致收敛

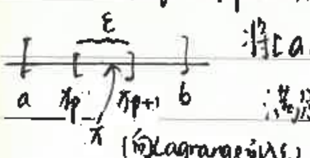
又 $-\frac{n\sin nx}{1+n^2}$ 在 $(0,2\pi)$ 连续 $\therefore f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有连续导数

例1. 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 收敛, $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致有界. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

思路: 无 $f(x)$ 信息, 研究 $f_n(x)$ 本身 — Cauchy

$$|f_{n+m}(x)-f_n(x)|\le\underbrace{|f_{n+m}(x)-f_{n+m}(x_p)|}_{\text{Lagrange}}+\underbrace{|f_{n+m}(x_p)-f_n(x_p)|}_{\text{点态Cauchy}}+\underbrace{|f_n(x_p)-f_n(x)|}_{\text{Lagrange}}$$

证明: $\because\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致有界 $\therefore \exists M>0$, $\forall n\in N$, $\forall x\in[a,b]$: $|f_n'(x)|\le M$



将 $[a,b]$ 分割成 n 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\cdots,n)$, 且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

满足 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}<\varepsilon$

又 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 收敛 $\therefore \forall x_p$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_p>0$, $\forall n>N_p$, $\forall m\in N^+$:

$|f_{n+m}(x_p)-f_n(x_p)|<\varepsilon$ (点态Cauchy)

取 $N=\max\{N_1,\cdots,N_n\}$, $\forall n>N$, $\forall m\in N$, $\forall p$ 有上式成立

$\forall x\in[a,b]$, $\exists 1\le p\le n$ s.t. $x\in[x_{p-1},x_p]$

$$\begin{aligned}\therefore |f_{n+m}(x)-f_n(x)|&\le|f_{n+m}(x)-f_{n+m}(x_p)|+|f_{n+m}(x_p)-f_n(x_p)|+|f_n(x_p)-f_n(x)|\\&\overset{\text{Lagrange}}{\le}|f_{n+m}'(\xi_p)(x-x_p)|+|f_{n+m}(x_p)-f_n(x_p)|+|f_n'(\eta_p)(x_p-x)|\\&\le M\varepsilon+\varepsilon+M\varepsilon=(2M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

$\therefore$ 一致收敛

§3 幂级数

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$ 称为幂级数

对关于$(x-x_0)$的幂级数,可令$x-x_0=u$,得到关于u的$u=0$处的幂级数

$x_0=0$幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 如几何级数 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$

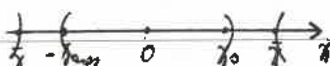
规定: $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$　　$S(0)\triangleq a_0$

2. Abel定理 收敛域: 对于$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, $x=0$时一定收敛, x取其它值时未必收敛. 由所有收敛点组成的集合称为收敛域

对幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ $(a_n\in\mathbb{R})$

(1) 若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$x_0\neq0$处收敛,则当$|x|<|x_0|$时 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$绝对收敛

(2) 若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$x_0\neq0$处发散,则当$|x|>|x_0|$时 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$发散



关于原点对称 ($x=\pm x_0$时可能收敛,也可能发散)

证明: ∵$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_0^n$收敛, 则$\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$

∴$\exists M>0$, $\forall n\in N^+$: $|a_nx_0^n|\le M$

当$|x|<|x_0|$时, 记$r=\frac{|x|}{|x_0|}<1$　∴$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\le Mr^n$

而$\sum_{n=0}^{+\infty}Mr^n$收敛　∴$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_nx^n|$也收敛　∴ $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$绝对收敛

若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$x=x_0$处发散. 假设$\exists|c|>|x_0|$, $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nc^n$收敛

∴$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$x=x_0$处收敛, 矛盾.

3. 幂级数的收敛半径 若$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$不在整个实数轴上收敛,也不仅在$x=0$处收敛,则$\exists r>0$ s.t.

(1) $|x|<r$时绝对收敛　(2) $|x|>r$时发散　　$x=\pm r$时可能收敛也可能发散.

r称为$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的收敛半径. 若$\forall x\in\mathbb{R}$均收敛,则$r=+\infty$. 若仅在$x=0$处收敛,则$r=0$

注: 收敛区间: 收敛开区间　　收敛域: 包含端点.

例1. 已知$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$. 若$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$条件收敛,求$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$收敛半径

$x=1$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$条件收敛. 由Abel引理知 $\forall x\in(-1,1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$绝对收敛 ∴$r\geq1$

若$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$在$x=c$且$|c|>1$时收敛 由Abel引理知 $x=1$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$绝对收敛, 矛盾 ∴$r\leq1$

∴综上 $r=1$

例2. $\{a_n\}\downarrow$　$\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$无界.　求$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-1)^n$收敛域.

∵$\{a_n\}$为正项数列, $\{a_n\}\downarrow$ 且 $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ ∴由Leibniz判别法知$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^na_n$收敛

而$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$发散　∴$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-1)^n$在$x=0$收敛, 在$x=2$发散

由Abel定理知 收敛域 $[0,2)$.

Date.　　Page.

4. 幂级数收敛半径的计算 ① 对于 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. 若 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$. 则 (1) $0<l<+\infty$ 时 $r=\frac{1}{l}$. (2) $l=0$ 时 $r=+\infty$

(3) $l=+\infty$ 时 $r=0$

证明: 记 $u_n(x)=a_n x^n$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = l|x|$

由正项级数比值判别法 有

(1) $0<l<+\infty$ 时 当 $l|x|<1 \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{l}$ 时收敛.

当 $|x|>\frac{1}{l}$ 时 $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n x^n|$ 发散. $|a_n x^n| \not\to 0$ ∴ 发散 ∴ $r=\frac{1}{l}$

(2) $l=0$ 时. $\forall x\in\mathbb{R}$. $l|x|=0<1$ ∴ $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n x^n|$ 收敛 ∴ 收敛 ∴ $r=+\infty$

(3) $l=+\infty$ 时 除 $x=0$ 其它点处均发散 ∴ $r=0$

② 对于 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. 若 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$ 则 (1) $0<\rho<+\infty$ 时 $r=\frac{1}{\rho}$. (2) $\rho=0$ 时 $r=+\infty$

(3) $\rho=+\infty$ 时 $r=0$

推广: 若 $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$ (不收敛: 找上极限) 则 (1) $0<\rho<+\infty$ 时 $r=\frac{1}{\rho}$ (2) $\rho=0$ 时 $r=+\infty$

(3) $\rho=+\infty$ 时 $r=0$

例1 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ 收敛域.

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$ ∴ $r=1$ 又 $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

∴ 收敛域 $[-1,1)$

例2 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$ 收敛域

中心非收敛本质: 换元. 令 $\frac{x-1}{3}=t$. 由例1知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}$ 收敛域 $[-1,1)$.

$-1\le\frac{x-1}{3}<1 \Leftrightarrow -2\le x<4$ ∴ 收敛域 $[-2,4)$

例3 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{4^n\cdot n}$ 收敛域.

缺项: 非常规幂级数 不能套公式.

法一 换元 令 $\frac{(x-2)^2}{4}=u$ 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{4^n\cdot n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n}$ 收敛域 $[-1,1)$.

∴ $-1\le\frac{(x-2)^2}{4}<1 \Rightarrow 0<x<4$ ∴ $r=2$ 收敛域 $(0,4)$

法二 回归原始: 比值判别法 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot n}{4^{n+1}\cdot(n+1)}(x-2)^2=\frac{(x-2)^2}{4}$

当 $0<x<4$ 时 收敛. 当 $x<0$ 或 $x>4$ 时 发散.

当 $x=0$ 或 $x=4$ 时 为调和级数 发散 ∴ $r=2$ 收敛域 $(0,4)$

$\sum\frac{x^n}{1-x}\Big|_{x=1-\frac{1}{n}} = n(1-\frac{1}{n})^n \to +\infty$

$=\sup\{\cdots\} = \sup\{\frac{x^n}{1-x}\}$

5. 幂级数的性质 ① 若 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 收敛半径 $r>0$ 则该幂级数在 $(-r,r)$ 上内闭一致收敛 (未必一致: $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$: $r=1$. $\sup\{r_n(x)\}$)

证明: $\forall[\alpha,\beta]\subset(-r,r)$. 令 $q=\max\{|\alpha|,|\beta|\}$. ∵ $q<r$ ∴ $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 在 $x=q$ 处绝对收敛 (Abel).

$\forall x\in[\alpha,\beta]$. $|a_n x^n|\le|a_n q^n|$ 优级数 而 $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n q^n|$ 收敛 ∴ $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛

② 若 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 收敛半径 $r>0$. 且在 $x=r$ (或 $x=-r$) 处收敛. 则该幂级数在 $[0,r]$ (或 $[-r,0]$) 上一致收敛

证明: $\forall x\in[0,r]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n$ 记 $u_n(x)=a_n r^n$, $v_n(x)=\left(\frac{x}{r}\right)^n$

则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ 收敛 从而一致收敛(与x无关)

而 $v_n(x)$ 在 $[0,r]$ 单调且一致有界. 由Abel判别法知 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $[0,r]$ 一致收敛.

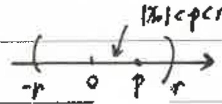
(3) 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛半径 $r>0$ 则 ① 和函数在 $(-r,r)$ 连续 ② 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在左(右)端点处收敛 则其和函数在左端点处右连续(右端点处左连续) 利用(2)即可证明.

6. 幂级数的收敛半径的性质: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 逐项求导 逐项求积 得到 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 收敛半径相同.

(收敛域可能变化(端点变化): $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛域 $[-1,1)$, $(-1,1)$, $[-1,1]$).

证明: 只需证 (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 与 (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ 有相同收敛半径.

$|x_0|<p<r$



思路: $n a_n x_0^{n-1} = a_n p^n \frac{n}{x_0}\left(\frac{x_0}{p}\right)^n$

若(1) $r>0$, 则 $\forall x_0\neq 0\in(-r,r)$, $\exists\, 0<p<r$ s.t. $|x_0|<p$. 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n p^n|$ 收敛

$\therefore \exists M>0$ s.t. $|a_n p^n| \le M$

$|a_n x_0^n| = |a_n p^n| \left|\frac{x_0^n}{p^n}\right| \le M q^n$ (记 $q=\frac{|x_0|}{p}<1$)

$\therefore |n a_n x_0^{n-1}| = |a_n x_0^n| \left|\frac{n}{x_0}\right| \le \frac{M}{|x_0|} n q^n$

又 $\sum_{n=0}^{+\infty} n q^n$ 收敛 $(q<1)$ $\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 x_0 绝对收敛.

由 x_0 任意性得 (2)在 $(-r,r)$ 收敛 $\therefore$ 收敛半径至少是 r

再证(2) $\forall |x|>r$ 均不收敛. 假设(2)在 x_0 $(|x_0|>r)$ 处收敛.

则 $\forall r<|x|<|x_0|$ 的一切 x 绝对收敛. 取 $n>|x|$.

$\therefore |n a_n x^{n-1}| = \left|\frac{n}{x}\right| |a_n x^n| \ge |a_n x^n| \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 x 绝对收敛

与(1)收敛半径为 r 矛盾 $\therefore$ 收敛半径恰为 r $\therefore$ 综上即证

推论: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 可任意阶求导. 若设 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ 则 $f^{(n)}(x_0)=a_n n! \Rightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

即 $f(x)$ 的幂级数展开唯一(泰勒系数) (泰勒展开: 近似计算)

7. 幂级数可逐项求导与逐项求积. 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛区间 $(-r,r)$, 其和函数为 $S(x)$. 则 $\forall x\in(-r,r)$

逐项求导: $S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

逐项求积: $\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

总结 幂级数的分析性质: 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 r, 和函数 $S(x)$, 则

(1) $S(x)$ 在 $(-r,r)$ 连续 (2) $S(x)$ 在 $(-r,r)$ 任何有限子区间 $[a,b]$ 均可积

(3) $S(x)$ 在 $(-r,r)$ 可导, 且可逐项求导

8. 幂级数的和函数: 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛域为 I, 定义在 I 上的 $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $(\forall x\in I)$ 称为 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 和函数

收敛域、和函数定义域

基于几何级数的求和：$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$

以 $-x$ 代 x ↓ $1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\frac{1}{1+x}$ $(-1<x<1)$

以 x^2 代 x ↓ $1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\frac{1}{1+x^2}$ $(-1<x<1)$

求和后收敛域变化

两边积分、求和得：$x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$ $(-1\le x<1)$

$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{2n+1}$ $(-1\le x\le 1)$

注：令 $x=-1$，有 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots=\ln 2$.

令 $x=1$，有 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$

例1. 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ 和函数（需同时求出收敛域）

收敛域 $[-1,1)$. 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$. $S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ （去分母：求导）

∴ $S(x)=\underline{\underline{S(0)}}+\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$ $(-1\le x<1)$

注：(1)积分需加上积分下限 (2)变限积分需用另一个变量 (3)注意求和下限：$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$（常数化为0）

例2. 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$ 和函数

$r=1$. $x=\pm1$ 发散 ∴收敛域 $(-1,1)$. 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$ （不匹配：提 x）

$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1$ （去分子：积分）

∴ $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=xS(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$.

变式. 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$

构造 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ ∴ $I=\frac{1}{2}S(\frac{1}{2})=2$

注：(1)构造幂级数：选择合适取值代入幂次

(2)匹配形式调整：提 x（讨论 $x=0$）.

(3)去分母：求导 去分子：积分

例3. 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$ 和函数. 计算 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n\cdot n}$.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n\frac{1}{n}$ 令 $\frac{x-1}{3}=u$ ∴ $I=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n}$ $-1\le\frac{x-1}{3}<1\Rightarrow -2\le x<4$ ∴收敛域 $[-2,4)$.

∵ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n}=-\ln(1-u)$ $(-1\le u<1)$ ∴ $I=-\ln\left(1-\frac{x-1}{3}\right)=\ln 3-\ln(4-x)$ $(-2\le x<4)$

令 $x=2$ ∴ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n n}=S(2)=\ln 3-\ln 2$

例4. 设 $a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{2^n}=6\pi$.

消 x：积分限换元：$a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx\xlongequal{x=n\pi-u}\int_0^{n\pi}(n\pi-u)|\sin(n\pi-u)|du=\int_0^{n\pi}(n\pi-u)|\sin u|du$

$=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|du-a_n\xlongequal{周期}n\pi\cdot n\int_0^{\pi}|\sin u|du-a_n=2n^2\pi-a_n$ ∴ $a_n=n^2\pi$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$. 收敛域 $|x|<1$.

Date. Page.

构造阶梯 幂次配凑

$S(x)=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$ 向目标靠拢 $x^2\sum_{n=2}^{+\infty}(x^n)''+x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)'$

$=x^2\Big(\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}x^n}_{\text{缺项}}\Big)''+x\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\Big)'=x^2\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)''+x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

令 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore S(\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}=6 \quad \therefore I=6\pi$

常见幂级数和函数的计算：(1) $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}\ (|x|<1)$

(2) $1-x+x^2-\cdots+(-x)^n+\cdots=\frac{1}{1+x}\ (|x|<1)$

(3) $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\Rightarrow S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\quad\therefore S(x)=-\ln(1-x)\quad(-1\le x<1)$

$\therefore T(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=xS(x)=-x\ln(1-x)\quad(-1\le x<1)$

(4) $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\Rightarrow\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+1}=\frac{1}{1-x}-1$

$\therefore S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1)$

(5) $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^{n-1}$ 收敛域 $(-1,1)$ $\quad\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n$

$\therefore\int_0^x\left(\int_0^u S(t)dt\right)du=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n+1}=\frac{1}{1-x}-1-x=\frac{x^2}{1-x}$

$\therefore S(x)=\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}\quad(-1<x<1)$

(另：$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n+1})''=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n+1}\right)''=\left(\frac{1}{1-x}-(1+x)\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}$)

(6) $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n^2x^n=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}\quad(-1<x<1)$

例1. 计算 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$.

法一：裂项. $S=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\right)$

构造裂项结构

令 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 易知收敛域 $[-1,1]$

$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}\quad\therefore S_1(x)=S(0)+\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$

$\therefore\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=-S_1(1)=-\frac{\pi}{4}$.

令 $S_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$. 收敛域 $(-1,1]$ $\quad\therefore S_2'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}$

$\therefore S_2(x)=S_2(0)+\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x)$. $\quad\therefore\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2\quad\therefore S=\ln 2-\frac{\pi}{2}$

法二：构造. 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)2n}x^{2n}$ 收敛域 $[-1,1]$

阶梯

$S''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n-2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=-\frac{1}{1+x^2}$

$\therefore S'(x)=S'(0)+\int_0^x-\frac{dt}{1+t^2}=-\arctan x$

$S(x)=S(0)+\int_0^x-\arctan u\,du\overset{\text{分部}}{=}-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\quad\therefore S=2S(1)=\ln 2-\frac{\pi}{2}$

次幂函数

例2. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 收敛域与和函数

收敛域：法一：根值 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}\right|}=x^2\quad\therefore|x|<1$ 绝对收敛 $|x|>1$ 发散

Date. Page.

$x=\pm1$时 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}$ $\underline{\text{拆分}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}$ 均收敛 ∴收敛域 $[-1,1]$

法一 比值 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-4)^{n+1}+1}{4^{n+1}(2n+3)}\cdot\frac{4^n(2n+1)}{(-4)^n+1}x^2\right|=x^2$.

法二 幂级数比值 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-4)^{n+1}+1}{4^{n+1}(2n+3)}\cdot\frac{4^n(2n+1)}{(-4)^n+1}\right|=1$

和函数: $S(x)=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}\right)$ $(x\neq0)$ ($x=0$时 $S(x)=2$).

记 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ $S_2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}$

$\therefore S_1'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$ $\therefore S_1(x)=\arctan x$ $(-1\le x\le1)$

$S_2'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=\frac{4}{4-x^2}$ $\therefore S_2(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$, $(-2<x<2)$

$\therefore$ 和函数 $S(x)=\begin{cases}\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}, & 0<|x|\le1,\\ 2, & x=0.\end{cases}$

注: 验证答案: 利用连续性. ∵原函数连续且在$[-1,1]$一致 ∴ $S(x)$连续

$\lim_{x\to0}S(x)=1+\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{2x}{2-x}\right)=1+\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{2-x}=2$.

Date. Page.

§4 函数的幂级数展开

1. 泰勒级数　若 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 $|x-x_0|<r$ $(0<r\le+\infty)$ 成立 则 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $(n=0,1,2,\cdots)$

特别地 $a_0=f(x_0)$. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数 称 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数.
(特别地 $x_0=0$ 处 称为麦克劳林级数)

证明: $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$

$\therefore f^{(n)}(x)=n!\,a_n+(n+1)n(n-1)\cdots2\,a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$

令 $x=x_0$ $\therefore a_0=f(x_0)$, $a_1=f'(x_0)\cdots$ $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数 对应的 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 唯一. (系数 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 唯一)

注: 该级数不一定收敛 即便收敛其和函数也不一定等于 $f(x)$.

例 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有任意阶导数 且 $f^{(n)}(0)=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore f(x)$ 对应 Maclaurin 级数各项均为 0 不等于 $f(x)$.

证明: $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\xlongequal{\frac{1}{x}=u}\lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^{u^2}}=0$ $\therefore f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\ne0\\ 0, & x=0\end{cases}$

下用数归证明 $f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 其中 $P_n(\frac{1}{x})$ 是关于 $\frac{1}{x}$ 的多项式.

设 n 时成立, 则 $n+1$ 时.

$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}\xlongequal{\frac{1}{x}=u}\lim_{u\to\infty}\frac{P_n(u)}{e^{u^2}}=0$

当 $x\ne0$ 时 $f^{(n+1)}(x)=-\frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x^3}P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}\triangleq P_{n+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$

其中 $P_{n+1}(\frac{1}{x})$ 是关于 $\frac{1}{x}$ 的多项式 $\therefore n+1$ 时成立　综上 已证.

2. 泰勒定理　设 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内存在任意阶导数 则 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$ 误差余项趋于0

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $(0<\theta_n<1)$ 为 Lagrange 余项

证明: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)\overset{\text{余项}}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Taylor 多项式 (Taylor 级数部分和 $S_n(x)$)

$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}S_n(x)=f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$

3. 常见函数的幂级数展开　例1. 求 $f(x)=e^x$ 的麦克劳林级数

$\because f^{(n)}(x)=e^x$ $\therefore a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$ $R_n(x)=\frac{e^{\theta_n x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ $(0<\theta_n<1,\ n=1,2,\cdots)$

下证余项趋于0. $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 取 M s.t. $|x|<M$

$\therefore |R_n(x)|\le\frac{e^M}{(n+1)!}M^{n+1}$

考虑 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^M}{(n+1)!}M^{n+1}$ 记 $u_n=\frac{e^M}{(n+1)!}M^{n+1}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n+2}=0$

$\therefore \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^M}{(n+1)!}M^{n+1}$ 收敛 $\therefore \frac{e^M}{(n+1)!}M^{n+1}\to0$　$\therefore \lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$

利用级数求极限

∴由Taylor定理得 $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(-\infty<x<+\infty)$

变式1. 证明 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}$ $(0<\theta_n<1)$，且 $\lim_{n\to+\infty}\theta_n=1$

记 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+r_n$

∴ $0<r_n<\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right)$

$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)$ 放为等比

$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n\cdot n!}$

∴ $0<r_n\cdot(n\cdot n!)<1$ 记 $n\cdot n!\,r_n=\theta_n\in(0,1)$ ∴ $r_n=\frac{\theta_n}{n\cdot n!}$ $(0<\theta_n<1)$

又 $\frac{1}{(n+1)!}<r_n<\frac{1}{n\cdot n!}$ ∴ $\frac{1}{(n+1)!}<\frac{\theta_n}{n\cdot n!}<\frac{1}{n\cdot n!}$

$\Rightarrow \frac{n}{n+1}<\theta_n<1$ ∴ $\lim_{n\to+\infty}\theta_n=1$

变式2. 求 $\lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi n!\,e)$：

∵ $e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}$，$\lim_{n\to+\infty}\theta_n=1$

∴ $\lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi n!\,e)=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\sin\left[\overbrace{2\pi n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)}^{\text{脱去}2\pi}+2\pi n!\frac{\theta_n}{n\cdot n!}\right]$

$=\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}\right)\xlongequal{\sin x\sim x}\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{2\pi\theta_n}{n}=2\pi$

例2. 求 $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林级数

$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ ∴ $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}, & n=2m-1\\ 0, & n=2m\end{cases}$ $m=1,2,\cdots$

$R_n(x)=\frac{\sin[\theta_n x+\frac{(n+1)\pi}{2}]}{(n+1)!}x^{n+1}$ $(0<\theta_n<1)$

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\exists M>0$ s.t. $|x|\le M$ ∴ $|R_n(x)|\le\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\to0$ $(n\to+\infty)$

∴ $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<+\infty)$

同理 $\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<+\infty)$

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $(-1<x\le1)$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}C_\alpha^n x^n$ $(-1<x<1)$

注：令 $x=1$ 有 $\sin1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

$\cos1=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

3. 复变量指数函数与欧拉公式 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+ib_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+i\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\triangleq A+iB$ 其中 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=A$，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=B$

当 $z\in\mathbb{C}$ 时 $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ 收敛域为整个复平面

∴ $e^{ix}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}\xlongequal{\text{奇偶分项}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos x+i\sin x$

∴ $\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

例3. 求 $f(x)=\arctan x$ 的麦克劳林级数

$\because \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \ (-1<x<1)$

$\therefore \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \ (-1<x<1)$

两边积分得 $\arctan x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

又 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 收敛域 $-1\le x\le 1$

$\therefore \arctan x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ (-1\le x\le 1)$

另: $\arcsin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1} \ (-1\le x\le 1)$

$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)$

例4. 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展为 x 的幂级数

$f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}=\arctan x$

$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} \ (-1<x<1)$

两边求积分得 $f'(x)=\arctan x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ (-1\le x\le 1)$

两边求积分得 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \ (-1\le x\le 1)$

例5. 求 $f(x)=\arcsin x$ 在 $x=0$ 处 Taylor 展开式

$\because (1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}C_\alpha^n x^n$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n}+\cdots$

$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$

两边积分得 $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}+\cdots \ (-1\le x\le 1)$

注. $\pi=2\left(1+\frac{1}{6}+\frac{3}{40}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}+\cdots\right)$ 收敛速度更快

4 基于Taylor展开的求和 例1. (1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n!}$ (2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-3n+5}{n!}$

$\because e=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ 缺项

$\therefore$ (1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e+2(e-1)=3e-2$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-3n+5}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\overbrace{n(n-1)-2n+5}}{n!}$ 阶梯 $=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}+5\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$

$=e-2e+5(e-1)=4e-5$

变式1. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2}{n!\,2^n}$ 配

构造 $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2}{n!}x^{n+1}$ 收敛域 $(-\infty,+\infty)$

$\therefore \int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=x^2e^x$

$\therefore S(x)=(x^2+2x)e^x \quad \therefore S=2S(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}\sqrt{e}$

变式2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$\therefore e^x+e^{-x} = 2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)$ 抵消

$\therefore S = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}x$

例2. 求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n)!}$ 的和.

$\because \sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$　$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\therefore \sin 1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$　$\cos 1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n)!} \overset{\text{凑}2n}{=\!=} \frac12\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n)!} = \frac12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

$$= -\frac12\sin 1+\cos 1$$

变式. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n)!}$　匹配

构造 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n)!}x^{2n+1}$

$\therefore \int_0^x S(t)\,dt = x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = x^2\cos x$

$\therefore S(x) = 2x\cos x - x^2\sin x$　$\therefore S = S(1) = 2\cos 1-\sin 1$

5. Taylor展开的应用　例1. 计算极限 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\arcsin x}{(e^x-1)(\sqrt{1+2x^2}-1)}$　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$

(1) $I_1 = \lim\limits_{x\to0}\frac{\left[x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]-\left[x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]}{x\cdot\frac12\cdot2x^2} = \frac16$

(2) $I_2 = \lim\limits_{x\to0}\frac{\left[1+x^2+\frac12x^4+o(x^4)\right]+2\left[1-\frac12x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]-3}{x^4} = \frac{7}{12}$

例2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

乘积函数展开：e^x最低常数 → $\sin x$展至3次

$\sin x$最低1次 → e^x展至2次

$$I = \lim_{x\to0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = \frac13$$

例3. 将 $\left(1+\frac1n\right)^n$ 展至2阶.

复合函数展开：逐步展开

$\left(1+\frac1n\right)^n \overset{\text{幂指函数指数化}}{=\!=\!=} e^{n\ln\left(1+\frac1n\right)} = e^{n\left[\frac1n-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]}$

指数部分在$x=0$处展开，1需提出

$= e\cdot e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ 作为整体继续展开

$$= e\left[1+\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\frac12\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac1n\right)\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= e\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= e-\frac{e}{2}\frac1n+\frac{11e}{24}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

例4. $f(x)=(x\sin x)^2$. 计算 $f^{(2022)}(0)$

利用Taylor展开求导.

$$f(x)\overset{\text{降幂}}{=}\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\cos 2x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+2}$$ -- -- 抵式 -- --

由Taylor展开的唯一性, x^{2022}系数为 $a_{2022}=-\frac{2^{2019}}{2020!}$

$$\therefore f^{(2022)}(0)=-\frac{2^{2019}}{2020!}\times 2022!=-2022\times 2021\times 2^{2019}$$

例5. $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. $f(t)=\begin{cases}\frac{\sin t}{t} & (t\neq 0)\\ 1, & (t=0)\end{cases}$ 求 $F^{n}(0)$.

$\because f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续 $\therefore F'(x)=f(x)$

又 $$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n}$$

$$\therefore F(x)=\int_0^x f(t)dt=x+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$\therefore a_{2n}=0.\quad a_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}\ (n\geq 1)$

$\therefore F'(0)=1.\quad F^{(2n)}(0)=0.\quad F^{(2n+1)}(0)=\frac{(-1)^n}{2n+1}\ (n\geq 1)$

例6. 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$ 的收敛区间与和函数.

记 $u_n(x)=(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$ $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{n}x^2=0$

$\therefore r=+\infty$. 收敛区间 $(-\infty,+\infty)$

法一. 直接计算 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$ $x=0$时 $S(0)=0$ (提前讨论 $x=0$)

$x\neq 0$时. $$\int_0^x\frac{2S(t)}{t}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2nt^{2n-1}}{(2n+1)!}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{x}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\underset{\text{缺项}}{\underline{-x}}\Big)=\frac{\sin x-x}{x}$$

$$\therefore \frac{2S(x)}{x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}\frac{x\cos x-\sin x}{2x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

法二. 反向构造 奇数阶阶乘 $\rightarrow$ $\sin x=x+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$x\neq 0$时. $\frac{\sin x}{x}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

添分子:求导 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$

例7. $(1+\frac{1}{n})^n=e-\frac{e}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{11e}{24}\cdot\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$

(1) $\lim_{n\to+\infty}n\left[(1+\frac{1}{n})^n-e\right]=-\frac{e}{2}$. (2) $\lim_{n\to+\infty}n\left(n\left[(1+\frac{1}{n})^n-e\right]+\frac{e}{2}\right)=\frac{11}{24}e$.

Date. Page.

(3) $\lim_{n\to+\infty} n\left[(1+\frac{1}{n})^n-(1+\frac{1}{3n})^{3n}\right]$

$=\lim_{n\to+\infty}\left\{n\left[(1+\frac{1}{n})^n-e\right]-\frac{1}{3}(3n)\left[(1+\frac{1}{3n})^{3n}-e\right]\right\}=-\frac{e}{2}(1-\frac{1}{3})=-\frac{e}{3}$

例8. (1) 将 $f(x)=\frac{1}{x+3}$ 展开成关于 $(x-2)$ 的幂级数. (2) 将 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成关于 x 的幂级数

并求 $f^{(n)}(0)$.

(1) $\frac{1}{ax+b}$ 型展开: 提 b 化 1: $\frac{1}{b}\frac{1}{\frac{a}{b}x+1}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{(x-2)+5}\xlongequal{\text{提}5}\frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{x-2}{5}}$ 整体 $=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{5^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{5^{n+1}}$

收敛域. $\frac{|x-2|}{5}<1 \Leftrightarrow -3<x<7$.

(2) $f(x)\xlongequal{\text{裂项}}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n$

收敛域 $-1<x<1$ $\quad f^{(n)}(0)=n!(1-\frac{1}{2^{n+1}})$

变式. 将 $\frac{1}{x^2}$ 展开成关于 $x-1$ 的幂级数.

$\frac{1}{x}$ 易展开. 联系: $\frac{1}{x}\xlongequal{\text{求导}}-\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n=1-(x-1)+\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots\ (0<x<2)$

$\therefore \frac{1}{x^2}=-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}n(x-1)^{n-1}$

例9. 求 $f(x)=(1-x)\ln(1-x)$ 在 $x=0$ 处幂级数展开.

分部展开合并. $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\ (-1<x\le 1)$ $\therefore \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ 次数对齐

$\therefore f(x)=(1-x)\ln(1-x)=-(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=-x-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$

$=-x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\quad(-1\le x<1)$.

例10. $\ln 2$ 的近似计算.

$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots\quad |R_n|=\left|\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}}\right|\le\frac{1}{n+1}$

$\left(\ln(x+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad \frac{1}{(n+1)!}[\ln(x+1)]^{(n+1)}\right)$ 即精确到 10^{-4} 需计算 10^4 项.

改进 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\ (-1<x\le 1)$

$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{n-1}}{n}-\cdots\ (-1\le x<1)$

相减得 $\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots)\quad(-1<x<1)$.

令 $\frac{1+x}{1-x}=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ $\therefore \ln 2=2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\cdots)$ —— 仅4项精确度便达到 10^{-4}, 快速收敛.

$R_4=2(\frac{1}{9}\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\frac{1}{3^{11}}+\cdots)<\frac{2}{9}(\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{3^{13}}+\cdots)=\frac{1}{4\times 3^9}<\frac{1}{70000}<10^{-4}$

例11. 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 收敛域与和函数.

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)}=1\quad\therefore r=1$

$x=\pm1$ 时 均收敛. $\therefore$ 收敛域 $[-1,1]$.

裂项: $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}\triangleq S_1(x)-S_2(x)$

记 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ $S_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ $\therefore S_1(x)=-\ln(1-x)$ $(-1\le x<1)$

记 $S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}$ $S_2(0)=0$.

缺项

$x\ne 0$时 $S_2(x)=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{-\ln(1-x)-x}{x}$ $(-1\le x<1,\ x\ne 0)$

$x=1$时 $S(1)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

$$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}=S_1(x)-S_2(x)=\begin{cases}\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x}, & -1\le x<0 \text{或} 0<x<1.\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

例12: 求 $f(x)=e^x\sin x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开 (到 x^5)

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$

$f(x)=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+o(x^5)$.

变式. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x^2-\tan x}{x^5}$

$$I=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+o(x^5)-x^2-\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)\right)}{x^5}=-\frac{4}{25}$$

例13. 求 $f(x)=\ln\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开 (到 x^4)

记 $g(x)=\frac{\sin x}{x}=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\ne0.\\ 1, & x=0\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续

$g(x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^4)$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$f(x)=\ln\left[1+\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^4)\right)\right]$

$=\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^4)\right)^2+o(x^4)=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+o(x^4)$

引申. $\sin x$ 所有零点为 $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ $\therefore f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的所有零点为 $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z},\ k\ne0)$

利用多项式逼近: $\prod(x-n\pi)(x+n\pi)$

由上知, 常数项为1 由韦达定理 $f(x)=\frac{\sin x}{x}=\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{k\pi}\right)\left(1+\frac{x}{k\pi}\right)=\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$

化为求和: 取 $\ln$: $\ln\frac{\sin x}{x}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}+\frac{x^4}{2k^4\pi^4}+\cdots\right)$

又 $\ln\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+o(x^4)$

$\therefore -\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}=-\frac{1}{6}\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k^4\pi^4}=-\frac{1}{180}\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$

Date. Page.

§1 函数的Fourier级数展开

1. 三角级数 称形如 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的级数为三角级数且 $T=2\pi$. 其中 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\dots)$ 均为常数 规定为 $\frac{a_0}{2}$, 便于计算公式统一

三角级数由三角函数列(三角函数系)所生成 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

三角函数系的正交性 三角函数系在 $[-\pi,\pi]$ 具有正交性, 即

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=0$ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin mx\,dx=0$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\,dx=0\ (n\neq m)$ $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\,dx=0\ (n\neq m)$

(2) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dx=2$ (规定 $\frac{a_0}{2}$ 的根本原因) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=1$ $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=1$

注 在 $C[a,b]$ 中, $\forall f,g\in C[a,b]$, 定义 $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 为线性空间 $C[a,b]$ 中的内积

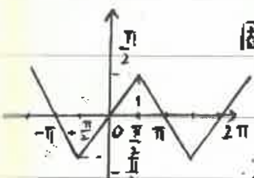
离散 Cauchy: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2$

连续: Cauchy-Schwarz 不等式: $(\int_a^b f(x)g(x)\,dx)^2\le\int_a^b[f(x)]^2dx\cdot\int_a^b[g(x)]^2dx$

正交性: $\forall f\neq g$. $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx=0$

例. 求 (1) $f(x)=\arcsin(\sin x)$ (2) $g(x)=\arccos(\cos x)$ 表达式, 并画草图

(1) 主值区间: 当 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时 $f(x)=x$

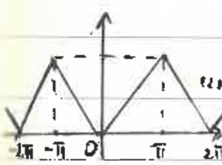


向主值区间转化

周期性补齐: 当 $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$ 时 $f(x)=\arcsin(\sin(\pi-x))=\pi-x$

当 $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ 时 $f(x)=\arcsin(-\sin(x+\pi))=-(x+\pi)$

$\therefore f(x)=\begin{cases}-x-\pi, & -\pi<x<-\frac{\pi}{2}\\ x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$ 奇函数 研究半个周期 $\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$ 且 $f(-x)=-f(x)$



(2) $g(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ (主值区间).

2. 周期为 2π 函数的 Fourier 展开

设 $f(x)$ 周期 $T=2\pi$, 对应三角级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

则 (1) a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\dots)$ 与 $f(x)$ 的关系? (2) 该三角级数是否收敛? 若收敛是否收敛于 $f(x)$?

对于(1). 设 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛 (逐项求积)

由三角函数系的正交性 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cdot 1\cdot\cos nx+b_n\cdot 1\cdot\sin nx)]\,dx=a_0\pi$

$\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$. $\forall n\in N^+$. $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]\cos nx\,dx$

$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx+\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k\cos kx\cos nx+b_k\sin kx\cos nx)\,dx$

$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi a_n$

Date.　　Page.

$\therefore a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ 同理 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad n=1,2,\cdots$

其中 a_0. a_n. b_n 称为Fourier系数.　　$a_0(a_n)$单独计算：凑微分后出现 $\frac{1}{n}$(或出现n的其他形式)

注. 由于 f 是 $T=2\pi$ 的函数 $\therefore$ 上述被积函数均为周期函数. 而周期函数在一个周期内积分为定数

$\therefore a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx$

若 f 为奇函数 则 $\underset{\text{无偶成分}}{a_n=0}$　$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

若 f 为偶函数 则 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$. $\overset{\text{无奇成分}}{b_n=0}$

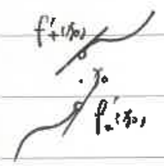
3. Dirichlet收敛定理　设 $f(x)$ 是 $T=2\pi$ 的函数 且 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑, 则 $\forall x\in[-\pi,\pi]$. $f(x)$ 的Fourier级数收敛, 且收敛于左右极限的平均值 即 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

(解决问题(2)) 若 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 且满足Dirichlet收敛定理 则 $f(x)$ 的Fourier级数在连续点处收敛于 $f(x)$

按段光滑的函数　f 在 $[a,b]$ 上按段光滑 指

(1) f 在 $[a,b]$ 上有连续导数 (称 f 在 $[a,b]$ 上光滑) (即 $f\in C^1[a,b]$)

(2) 或 f 在 $[a,b]$ 上至多只有有限个第一类间断点, f 在 $[a,b]$ 上的导函数 f' 除至多有限点外都存在且连续 若导数不存在或某点不连续 则 f' 左右极限均存在



注. 若 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点, 定义广义导数(拟导数)

$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0}$　　$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}$

4. Fourier级数中常见的n个积分　(1) $f(x)=x\quad(0<x\le\pi)$.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,d(\sin nx)=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right]$

$=\frac{1}{n\pi}\left(x\sin nx+\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}-\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2m-1)^2}, & n=2m-1,\\ 0, & n=2m\end{cases}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,d(\cos nx)=\frac{1}{n\pi}\left(-x\cos nx+\overset{0}{\frac{\sin nx}{n}}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

(2) $f(x)=x^2\quad(0\le x\le\pi)$.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\,d(\sin nx)=\frac{1}{n\pi}\left[x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx\right]$

$=\frac{1}{n\pi}\left[\overset{0}{x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}}-2\frac{1}{n}\left(-x\cos nx+\frac{\sin nx}{n}\right)\right]=\frac{2(-1)^n}{n^2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\,d(\cos nx)=-\frac{1}{n\pi}\left[x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\right]$

$=\frac{1}{n\pi}\left[-x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}+2\frac{1}{n}\left(\overset{0}{x\sin nx}+\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}\right]$

$=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}+\frac{2[(-1)^n-1]}{n^3\pi}$

例1. $f(x)$ 周期为 2π. $f(x)=x\ (-\pi<x\le\pi)$ 将 $f(x)$ 展开为Fourier级数

$\therefore f(x)$ 为奇函数. $\therefore a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$

非严格($f(-\pi)\ne-f(\pi)$). 但有限点不影响积分结果

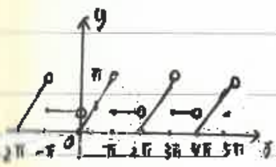
$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\left(-x\cos nx+\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$

非连续点，（不收敛到 $f(x)$，等式不一定成立）

$\therefore f(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\quad(x\in\mathbb{R},\ x\neq(2k+1)\pi)$

注：令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$

例2. 设 $f(x)$ 周期为 2π，且 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开为Fourier级数



$f(x)$ 满足收敛定理条件，且在 $x=k\pi$ 处间断 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，在其余点处连续

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx+\int_0^{\pi}x\,dx\right)=1+\frac{\pi}{2}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx+\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\right)=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\ (n\in\mathbb{N}^+)$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx\right)=\frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n\pi}$

由Dirichlet收敛定理知 $f(x)=\frac{\pi+2}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n\pi}\sin nx$ $(x\neq k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 间断点

注：令 $x=0$ 得 $\frac{\pi+2}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\underset{\text{间断点}}{\overset{\text{Dirichlet}}{=}}\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

$\therefore$ 设 $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S\Rightarrow S=\frac{\pi^2}{6}$

同理 $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}S=\frac{\pi^2}{12}$

例3. 求 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 的Maclaurin展开式

设 $P_n(x)$ 的Maclaurin展开为 $\sum_{k=0}^{+\infty}A_kx^k=A_0+A_1x+\cdots+A_kx^k+\cdots$

$\because P_n^{(k)}(0)=k!\,a_k\quad\therefore A_k=\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}=a_k\ (k=0,1,\cdots,n)\quad A_k=0\ (k>n)$

$\therefore P_n(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}A_kx^k=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

注：Maclaurin展开即以 $1,x,\cdots,x^n$ 为坐标，同一组基下坐标一致

例4. 求 $T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$ 的Fourier展开式

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)dx\overset{\text{正交性}}{=}A_0$

$1\le k\le n$ 时，$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\cos kx\,dx=A_k$

$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\sin kx\,dx=B_k$

当 $k>n$ 时，$a_k=b_k=0$

$\therefore T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$

注：三角级数Fourier展开为自身

变式. 求 $f(x)=\sin^4x$ 的Fourier展开式

降幂：$f(x)=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-2\cos2x+\cos^22x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{8}(1+\cos4x)$

$\therefore\sin^4x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{8}\cos4x$

5. 正弦级数与余弦级数. 若 $f(x)$ 是 $T=2\pi$ 的奇函数, 则 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overset{奇}{f(x)\cos nx}\,dx=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$

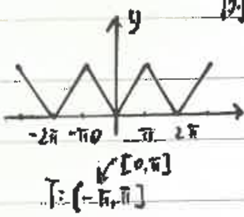
$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overset{偶}{f(x)\sin nx}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ $(n=1,2,\cdots)$

若 $f(x)$ 满足收敛定理条件, 则 $f(x)$ 展开所得级数为正弦级数

若 $f(x)$ 是 $T=2\pi$ 的偶函数, 则 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$ $b_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$

若 $f(x)$ 满足收敛定理条件, 则 $f(x)$ 展开所得级数为余弦级数

例1. 将 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开为余弦级数



延拓 $\longrightarrow$ 偶延拓 + 周期延拓

$b_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$ $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)$

由Dirichlet收敛定理知, $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $(0\le x\le\pi)$.

注. 令 $x=0$, 有 $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=f(0)=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

例2. 将 $f(x)=\sin x$ $x\in[0,\pi]$ 展开为余弦级数 并求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$ 的和.

延拓 $\longrightarrow$ 偶延拓 + 周期延拓

$b_n=0$. $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx\overset{两次分部}{=}\frac{2[(-1)^{n+1}-1]}{\pi(n^2-1)}=\begin{cases}-\frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n为偶\\ 0, & n为奇\end{cases}$

$\therefore \sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$ $(0\le x\le\pi)$

注. 令 $x=\frac{\pi}{2}$ 有 $1=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

6. 一般周期函数的展开. 对 $T=2l$ $(l>0)$ 的 $f(x)$ 可通过变量代换 $x=\frac{l}{\pi}u$ (则 $u=\frac{\pi}{l}x$) 变为 $T=2\pi$ 的 $f(x)=f(\frac{l}{\pi}u)\triangleq F(u)$

$x:-l\to l$, $u:-\pi\to\pi$ $\Rightarrow \frac{x}{u}=\frac{l}{\pi}$ $\therefore x=\frac{l}{\pi}u$.

若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 可积, 则 $F(u)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 也可积. $F(u)$ Fourier级数展开式为

$F(u)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nu+b_n\sin nu)$ (不写"=": 未知是否收敛至 $F(u)$)

其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\cos nu\,du=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi}{l}nx\,dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\sin nu\,du=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi}{l}nx\,dx$ $(n=1,2,\cdots)$

若 $f(x)$ 满足Dirichlet收敛定理条件, 则

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{\pi}{l}nx+b_n\sin\frac{\pi}{l}nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

例1. 将 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}$ 展开为 $T=2$ 的正弦级数

奇延拓.

先将f(x)延拓为[-1,1]上奇函数,再延拓为T=2的周期函数.

则 $a_n=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ $b_1=2\int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx=2\int_0^{\frac12}\sin^2\pi x\,dx=\frac12$.

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx=2\int_0^{\frac12}\sin\pi x\sin n\pi x\,dx$ ↗ 单独讨论 (积化和差导致0出现)

积化和差 $-\int_0^{\frac12}[\cos(n+1)\pi x-\cos(n-1)\pi x]\,dx=\dfrac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2}}{(n-1)\pi}-\dfrac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2}}{(n+1)\pi}$

$=\begin{cases}0, & n>1且n为奇 \\ (-1)^{\frac{n+2}{2}}\dfrac{2n}{(n^2-1)\pi}, & n为偶\end{cases}$ ($\sin\frac{n}{2}\pi$处理: 分奇偶+分数指数)

($x=\frac12$处间断)

$\therefore f(x)=\frac12\sin\pi x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin 2n\pi x$, $x\in[0,\frac12)\cup(\frac12,1]$

例2 设 $f(x)=x^2$ $(0\le x\le 1)$, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin n\pi x$ $(-\infty<x<+\infty)$, 其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx$ $(n=1,2,\cdots)$ 求 (1) $S(-\frac12)$, (2) $S(-5)$.

(无需计算b_n)

若 $f(x)\sim S(x)$, 则对 $f(x)$ 作奇延拓+周期延拓, 此时 b_n 正好为对应的Fourier系数.

将 $f(x)$ 作奇延拓, 再将其延拓为 $T=2$ 的 $F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\le x\le 1,\\ -f(-x), & -1<x<0.\end{cases}$

验证: $F(x)$的Fourier系数 $a_n=0$, $b_n=2\int_0^1 F(x)\sin n\pi x\,dx=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx$

$\therefore$ 由Dirichlet收敛定理知, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin n\pi x=\frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}$

$\therefore S(-\frac12)=-S(\frac12)\xlongequal{连续点}-f(\frac12)=-\frac14$, $S(-5)\xlongequal{T=2}S(1)\xlongequal{间断点}\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=0$

例3 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac12,\\ 2-2x, & \frac12<x\le 1\end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos n\pi x$ $(x\in\mathbb{R})$, 其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$ $(n=1,2,\cdots)$, 求 (1) $S(-\frac52)$ (2) $S(-3)$.

(无需计算a_n)

若 $f(x)\sim S(x)$, 则对 $f(x)$ 作偶延拓+周期延拓, 此时 a_n 正好为对应的Fourier系数

将 $f(x)$ 作偶延拓, 再将其延拓为 $T=2$ 的 $F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\le x\le 1,\\ f(-x), & -1<x<0.\end{cases}$

验证: $F(x)$的Fourier系数 $b_n=0$, $a_n=2\int_0^1 F(x)\cos n\pi x\,dx$

$\therefore$ 由Dirichlet收敛定理知 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos n\pi x=\frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}$

$\therefore S(-\frac52)=S(-\frac12)=S(\frac12)\xlongequal{间断点}\frac{f(\frac12-0)+f(\frac12+0)}{2}=\frac34$, $S(-3)=S(1)\xlongequal{连续点}f(1)=0$

7. 常见函数的Fourier展开

(1) $x^2=\frac43\pi^2+4\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi}{n}\sin nx\right]$ $(0<x<2\pi)$ (2) $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ $(-\pi\le x\le\pi)$

(3) $\arcsin(\sin x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin(2n+1)x$ $(x\in\mathbb{R})$ (4) $\arccos(\cos x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $(x\in\mathbb{R})$

(5) $\sin^4 x=\frac38-\frac12\cos 2x+\frac18\cos 4x$ (6) $|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$ $(x\in\mathbb{R})$

(7) $\cos\frac{x}{2}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx$ $(0\le x\le\pi)$. (8) $x-[x]=\frac12-\frac1\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ $(0<x<1)$

例: $x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}x$　　$x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x$

例1 已知 $x=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ $(x\in\mathbb{R}, x\neq(2k+1)\pi)$

$\because \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ 在 $(0,\pi)$ 内闭一致收敛

两边积分,有 $x^2=4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}[\cos nx-1]=4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$　$\therefore x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ $(-\pi<x\leq\pi)$

注: Fourier级数可逐项求积,收敛到原函数的积分

引申. 求 $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$ 在 $x=0$ 处 Taylor展开.

复杂问题简单化.　$f(x)\xlongequal{\text{立方差}}\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{1}{1-x^3}-\frac{x}{1-x^3}$

例2 (Fourier级数最佳逼近) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, a_0, a_k, b_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 为 $f(x)$ 的Fourier系数

记 $T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$. 证明: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$ ($\delta(f,T_n)$ 方差) 最小值为

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]$ 当且仅当 $A_0=a_0, A_k=a_k, B_k=b_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 时取等

(即以Fourier系数为系数的三角多项式最佳逼近, 称为Fourier多项式)

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(x)]^2dx$

其中 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]dx$

$$\xlongequal{\text{正交性}}\frac{a_0A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_kA_k+b_kB_k)$$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(x)]^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]^2dx$

$$\xlongequal{\text{正交性}}\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)$$

$\therefore \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-a_0A_0-2\sum_{k=1}^{n}(a_kA_k+b_kB_k)+\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)$

$$\xlongequal{\text{整理}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]+\left[\frac{a_0^2}{2}+\frac{A_0^2}{2}-a_0A_0+\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)-2\sum_{k=1}^{n}(a_kA_k+b_kB_k)\right]$$

$$\xlongequal{\text{配方}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]+\left[\frac{1}{2}(A_0-a_0)^2+\sum_{k=1}^{n}\left((A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2\right)\right]$$

$$\geq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]$$

当且仅当 $A_0=a_0, A_k=a_k, B_k=b_k$ 时取等

§2 Fourier级数的收敛判别法

1. Bessel不等式. 若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积, 则 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx$. 其中$a_n, b_n$为$f(x)$的Fourier系数

证明: 记 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$部分和$S_n$, 则$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[S_n(x)]^2dx$$

其中 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]dx$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[S_n(x)]^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]^2dx$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

$$\therefore 0\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)]$$

$$\therefore\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx$$

$$\therefore\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx\quad(n\to+\infty)$$

$\therefore\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)$收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2$均收敛

推论1. Riemann-Lebesgue定理(弱化版) 若f为可积函数, 则 $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0$

$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$ (任意区间$[a,b]\subset[-\pi,\pi]$成立: 将$[-\pi,a)$, $(b,\pi]$延拓为0)

证明: 由已知, $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)$收敛 $\therefore\lim_{n\to+\infty}(a_n^2+b_n^2)=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=0$

$$\therefore\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0.$$

$$\therefore\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,\ \lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0.$$

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ 是否为$T=2\pi$周期函数的Fourier展开?

不存在 $T=2\pi$的$f(x)$ s.t. $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

反证 若∃满足条件的$f(x)$, 则 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}$

由Riemann-Lebesgue定理知 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$收敛, 而调和级数发散, 矛盾.

推论2. 若f为可积函数, 则 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx=0$ $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(n+\frac{1}{2})x\,dx=0$.

证明: $\because\sin(n+\frac{1}{2})x=\sin nx\cos\frac{x}{2}+\cos nx\sin\frac{x}{2}$

$$\therefore\int_0^{\pi}f(x)\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx=\int_0^{\pi}[f(x)\cos\tfrac{x}{2}]\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}[f(x)\sin\tfrac{x}{2}]\cos nx\,dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\sin nx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}F_2(x)\cos nx\,dx$$

其中 $F_1(x)=\begin{cases}f(x)\cos\frac{x}{2} & (0\le x\le\pi)\\ 0 & (-\pi\le x<0)\end{cases}$　$F_2(x)=\begin{cases}f(x)\sin\frac{x}{2} & (0\le x\le\pi)\\ 0 & (-\pi\le x<0)\end{cases}$ 延拓为0

显然, F_1, F_2在$[-\pi,\pi]$可积, 由推论知 $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\sin nx\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F_2(x)\cos nx\,dx=0$

∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx=0$ 成立. 同理 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(n+\frac{1}{2})x\,dx=0$.

2. Riemann-Lebesgue定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 则 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$.

证明: ∵ f 在 $[a,b]$ 上Riemann可积. ∴ f 在 $[a,b]$ 上有界

∴ $\exists M>0\ \forall x\in[a,b],\ |f(x)|\le M$.

记 $n=[\sqrt{\lambda}]$ 当 $\lambda\to+\infty$ 时, $n\to+\infty$

将 $[a,b]$ 作 n 等分 分点为 $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)\quad (i=0,1,2,\cdots,n)$.

记 ω_i 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅. 又 f 在 $[a,b]$ 可积 ∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$

又 $\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,dx\right|=\frac{1}{\lambda}|\sin\lambda x_i-\sin\lambda x_{i-1}|\le\frac{2}{\lambda}$

∴ $\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\right|$ 插入 $f(x_i)$ 分点, 化 $f(x)$ 为co.

$\le\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_i))\cos\lambda x\,dx\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,dx\right|$

$\le\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|(f(x)-f(x_i))\cos\lambda x|\,dx+\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\cdot\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,dx\right|$

$\le\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(x_i)|\,dx+M\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,dx\right|$

$\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+M\frac{2n}{\lambda}\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+M\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\to 0\ (\lambda\to+\infty)$.

∴ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0$. 同理 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$.

例. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且单调 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin px\,dx=0$.

思路: $\int_0^{+\infty}f(x)\sin px\,dx=\underbrace{\int_0^N f(x)\sin px\,dx}_{\text{有限区间}}+\int_N^{+\infty}f(x)\sin px\,dx$

∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ∴ $\exists N>0,\ \forall x>N:\ |f(x)|\le 1$

又 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调, $\forall A>N$, 由积分第二中值定理知 $\exists\xi\in[N,A]$ s.t.

$\left|\int_N^A f(x)\sin px\,dx\right|=\left|f(N)\int_N^{\xi}\sin px\,dx+f(A)\int_{\xi}^{A}\sin px\,dx\right|$

$\le\left|\int_N^{\xi}\sin px\,dx\right|+\left|\int_{\xi}^{A}\sin px\,dx\right|=\left|\frac{-\cos px}{p}\Big|_N^{\xi}\right|+\left|\frac{-\cos px}{p}\Big|_{\xi}^{A}\right|\le\frac{4}{p}$

∴ $\left|\int_N^{+\infty}f(x)\sin px\,dx\right|\le\frac{4}{p}$ ∴ $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_N^{+\infty}f(x)\sin px\,dx=0$

由Riemann-Lebesgue定理知 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^N f(x)\sin px\,dx=0$

∴ $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin px\,dx=0$.

注. 积分第二中值定理. 设 f 在 $[a,b]$ 可积, 若 g 在 $[a,b]$ 单调, 则 $\exists\xi\in[a,b]$

s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\,dx+g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\,dx$.

3. Fourier级数部分和的积分表示. 若 $f(x)$ 是 $T=2\pi$ 的函数 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积 且它所对应的Fourier级数

部分和 $S_n(x)$ 可表示为 $S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$

$t=0$ 时, 被积函数中的分式的其极限 $(n+\frac{1}{2})$ 存在, 为可去间断点,

Date. Page.

证明. $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k\cos kx + b_k\sin kx)$

将 a_0, a_k, b_k 的 Fourier 系数代入得

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du + \sin kx\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(kx-ku)\,du\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-u)\right]du$$

$$\overset{u-x=t}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt$$

$$\overset{\text{周期}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t - \sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

4. Dirichlet 收敛定理的证明

Dirichlet 定理. 设 $f(x)$ 是 $T=2\pi$ 的函数 且 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑, 则 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛, 且 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

证明: $\lim_{n\to+\infty}\left(S_n(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right) = 0$

下证 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}f(x+0) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right) \triangleq \lim_{n\to+\infty} J_n' = 0$

转化 $\frac{1}{2}$ 以合并: $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$

$\therefore J_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+0) - f(x+t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$

令 $\varphi(t) = \frac{f(x+0)-f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}} = -\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$ (处理分母 $=0$)

$\because f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 分段光滑 $\therefore \lim_{t\to0+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = f'_+(x+0)$ 右导数

$\therefore \lim_{t\to0+0}\varphi(t) = -f'_+(x+0)$ $\therefore \varphi(t)$ 在 $t=0$ 右连续

$\therefore \varphi(t)$ 在 $[0,\pi]$ 上最多只有有限个第一类间断点, $\therefore \varphi(t)$ 可积 (可补充定义)

由 Riemann-Lebesgue 定理知 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}J_n' = 0$

同理 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}f(x-0) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right) = 0$

5. Parseval 恒等式: 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 若 f 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f, 则

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx$$

先证若 g 有界, $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}g(x)u_n(x)$ 一致收敛:

$\because g(x)$ 有界 $\therefore \exists M>0$, $|g(x)|\le M$

$\because \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ $\therefore \forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, \forall p\in N^+, \forall x\in D$

$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$

$\therefore |g(x)u_{n+1}(x)+\cdots+g(x)u_{n+p}(x)| \le |g(x)||u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)| < M\varepsilon$

$\therefore$ 由Cauchy收敛准则知 $\sum_{n=1}^{+\infty} g(x)u_n(x)$ 一致收敛 (一致·有界 ⇒ 一致)

$\because f$ 的Fourier级数一致收敛于 f $\therefore \forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

又 f 在 $[-\pi,\pi]$ 可积 $\therefore f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有界

由上知 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x)(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 一致收敛

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]dx$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx)dx$$

$$\overset{逐}{=}\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx)dx$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

例1. $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

$\because f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积 $\therefore$ 由Parseval等式知

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{5}\pi^4=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

例2. $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $(-\pi\le x\le\pi)$, 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

由Parseval等式知 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{3}\pi^2=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$

6. 杂题 例1. 求 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n^2-1}$ 的收敛域及和函数

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{(n+1)^2-1}=1$ $\therefore r=1$

$x=\pm1$ 时 级数均收敛 $\therefore$ 收敛域 $[-1,1]$. $x=1$时不收敛

当 $-1\le x<1$ 时 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n^2-1} \overset{裂项}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$

$$=-\frac{x^2}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2}\left(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right)$$

当 $x=1$ 时 $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\left(1-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\tfrac{1}{n-2}}-\frac{1}{n}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)\right)$ 裂项

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\to\frac{3}{4}\ (n\to+\infty)$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1-x)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2, & -1\le x<1\\ \frac{3}{4}, & x=1\end{cases}$$

例2. 求 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n[(n-2)!+n]}{(n-1)!}$ 的和.

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n[(n-2)!+n]}{(n-1)!}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n-2)!}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(n-1)!}=\ln 2+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(n-1)!}$$

法一. 构造 $S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!} = -x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=-x(e^{-x}-1)$ 缺项

Date. Page.

$\therefore S'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n x^{n-1}}{(n-1)!} = xe^{-x} - e^{-x} + 1$

$\therefore \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(n-1)!} = S'(1) = 1$. $\therefore$ 原式 $= 1 + \ln 2$.

法二. 构造相似结构 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!}$

$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-1} - (e^{-1} - \underset{缺项}{1}) = 1$

引申. $\frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} = \frac{n+2}{n!(1+n+1+n^2+3n+2)} = \frac{n+2}{n!(n+2)^2} = \frac{1}{n!(n+2)}$

例3. 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \ (-1 < x \le 1)$ $\therefore \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}$ 收敛域 $(-1,1]$

$\therefore$ 在 $[0,1]$ 一致收敛. $\therefore \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1} dx \overset{一致}{=\!=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1} dx$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

例4. (Dirichlet 积分) $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} dx \quad (n \in N^+)$.

$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right) = \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} [\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x] = \sin(n+\frac{1}{2})x$.

$\therefore 0 < x \le \pi$ 时. $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \triangleq f(x)$

而 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = n + \frac{1}{2}$. 补充定义 $f(0) = n + \frac{1}{2}$. 则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 连续.

$\therefore \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} dx = 2\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right) dx = \pi$

变式. 计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

由 Dirichlet 判别法知. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛

由上知 $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ $\therefore \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$

误差估计: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

$\overset{x=(n+\frac{1}{2})u}{=\!=\!=} \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u} du = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \sin(n+\frac{1}{2})x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right) dx$

$= \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} dx + \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \sin(n+\frac{1}{2})x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right) dx$

令 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}, & 0 < x \le \pi \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (补充定义) $\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin\frac{x}{2} - x}{x\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{8} + o(x^3)) - x}{\frac{x^2}{2}} = 0$.

又 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 连续 $\therefore f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上 Riemann 可积 ($f(0+0)=0$)

由 Riemann-Lebesgue 定理知 $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \sin(n+\frac{1}{2})x \cdot f(x) dx = 0$

$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$

例5. 求 $f(x) = |x| \ (-\pi \le x < \pi)$ 的 Fourier 展开式.

将 $f(x)$ 延拓为 $T=2\pi$ 的函数 $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi$ $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$

由 Dirichlet 收敛定理知. $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (-\pi \le x \le \pi)$

由 Parseval 等式知 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{3}\pi^2 = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$

Date.　　Page.

$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

例6. 设 $S_n(x)=n(x^n-x^{2n})$. 证明：(1) $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 收敛但不一致收敛 (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)dx \neq \int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)$

(1) $\because \forall x\in[0,1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{2n}$ 均收敛 $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}nx^n=\lim\limits_{n\to+\infty}nx^{2n}=0$

$\therefore S(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=0$

$x=1$ 附近破坏一致性：取 $x_n=1-\frac{1}{n}$ 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n(x)-S(x))=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[(1-\frac{1}{n})^n-(1-\frac{1}{n})^{2n}\right]=\infty$

$\therefore \{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 非一致收敛

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)dx=\frac{1}{2}$. $\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)dx=0$ $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)dx\neq\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)dx$.

Date.　　　Page.

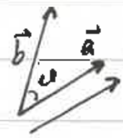
0 向量代数与空间解析几何

向量的线性运算

概念：三维空间中以始点到终点所做的既有大小(两点间距离)，又有方向(从始点到终点的方向)的几何量称为向量。

向量大小称为模。

(1) 自由向量：平移不变　(2) 零向量：模为零，方向任意　(3) 单位向量：模等于1



(4) 两向量相等：模相等，方向相同，两向量平移可重合　(5) 两向量夹角：$0 \le \theta \le \pi$

向量的特殊位置关系：垂直，平行(共线)，共面

向量的线性运算：加法：平行四边形法则，三角形法则 => 多个向量相加

加法运算律：(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(3) $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$，$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

减法：差矢量

数乘：$\vec{d}=k\vec{a}$　$k\in \mathbb{R}$

模：$|\vec{d}|=|k||\vec{a}|$　方向：$k>0$时 $\vec{d}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$k<0$时 $\vec{d}$ 与 $\vec{a}$ 反向

数乘运算律：(1) $1\vec{a}=\vec{a}$　(2) $(k_1k_2)\vec{a}=k_1(k_2\vec{a})$

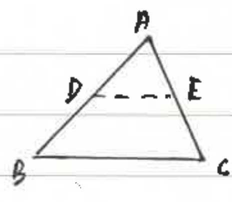
(3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$　$(k_1+k_2)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$

相反矢量：$-\vec{a}=(-1)\vec{a}$ => $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$

单位矢量：$\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$　(向量的大小方向表示：$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0$)

例. 用向量方法证明三角形中位线平行于对应边且其长度等于对应边长一半.

设D、E分别是AB、AC中点，∴ $\vec{AD}=\frac{1}{2}\vec{AB}$，$\vec{AE}=\frac{1}{2}\vec{AC}$



∴ $\vec{DE}=\vec{DA}+\vec{AE}=\frac{1}{2}\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{BC}$

∴ $\vec{DE}\parallel\vec{BC}$ 且 $|\vec{DE}|=\frac{1}{2}|\vec{BC}|$

向量的模与向量的单位化：$\vec{a}$ 的大小称为 $\vec{a}$ 的长度(模)，记作 $|\vec{a}|$ 或 $\|\vec{a}\|$.

模为1的向量称为单位向量. $\vec{a}$ 单位化向量有两个：$\pm\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\vec{a}$ 同向的单位化向量记为 $\vec{a}^0$，则 $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$　$(|\vec{a}|\ne 0)$

2. 向量的数量积(点积、内积)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中 θ 为 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之间的夹角

矢量的模：$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$　两矢量的夹角：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$　两矢量垂直：$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

点积的运算律：(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　(2) $k(\vec{a}\cdot\vec{b})=(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$

(3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Date　　Page.

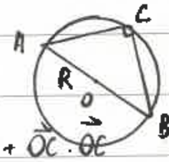
Cauchy-Schwarz不等式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

高维形式：若 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$

则 $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

三角不等式：$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

例1. 证明直径所对圆周角为直角



即要证 $\vec{AC}\perp\vec{BC}$

$\vec{AC}\cdot\vec{BC}=(\vec{AO}+\vec{OC})\cdot(\vec{BO}+\vec{OC})=\vec{AO}\cdot(-\vec{OB})+\vec{OC}\cdot(-\vec{OB})+\vec{AO}\cdot\vec{OC}+\vec{OC}\cdot\vec{OC}$

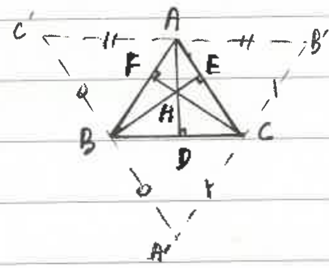
$=-R^2+R^2=0$　∴ $\vec{AC}\perp\vec{BC}$

例2. 设单位向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 夹角为 θ $(0<\theta<\pi)$，a、b为正数，求 $\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{|a\vec{\alpha}|+|b\vec{\beta}|-|a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}|}{\theta^2}$

$\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{|a\vec{\alpha}|+|b\vec{\beta}|-|a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}|}{\theta^2}\overset{\text{单位向量}}{=\!=}\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}{\theta^2}$

$\overset{\text{分子有理化}}{=\!=}\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{2ab(1-\cos\theta)}{\theta^2}\cdot\dfrac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}\overset{\cos\theta\sim1-\frac{1}{2}\theta^2}{=\!=}\dfrac{ab}{2(a+b)}$

例3. 证明三角形三高共点。



法一. 平面几何

过A.B.C作 $B'C'\parallel BC$，$A'C'\parallel AC$，$A'B'\parallel AB$ 交于A'、B'、C'

∴AB、AC、BC为 $\triangle A'B'C'$ 中位线

∵ $AD\perp BC$，$BC\parallel B'C'$　∴ $B'C'\perp AD$

又 $AC'=B'A$　∴ AD为B'C'中垂线，同理 BE为A'C'中垂线

∴ H为 $\triangle A'B'C'$ 外心，即证。

法二. $\begin{cases}\vec{BH}\cdot\vec{AC}=\vec{BH}\cdot(\vec{AH}+\vec{HC})=0\\ \vec{CH}\cdot\vec{AB}=\vec{CH}\cdot(\vec{AH}+\vec{HB})=0\end{cases}\Rightarrow\vec{AH}\cdot(\vec{BH}-\vec{CH})=0$

(H为两条高线交点 ⇒ 第三条高线过H)

∴ $\vec{AH}\cdot\vec{CB}=0\Leftrightarrow AH\perp BC$　∴ $\triangle ABC$ 三高共点。

法三. $\vec{AH}\cdot\vec{BC}=(\vec{AB}+\vec{BH})\cdot(\vec{BA}+\vec{AC})=\vec{AB}\cdot(\vec{BA}+\vec{AC})+\underbrace{\vec{BH}\cdot\vec{BA}+\vec{BH}\cdot\vec{AC}}_{}$

$=\vec{AB}\cdot\vec{BC}-\vec{AB}\cdot\vec{BH}=\vec{AB}\cdot\vec{HC}=0$

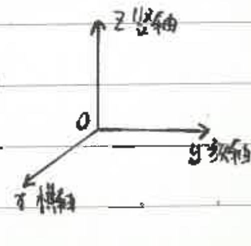
∴ $AH\perp BC$　∴ $\triangle ABC$ 三高共点。

3. 空间直角坐标系

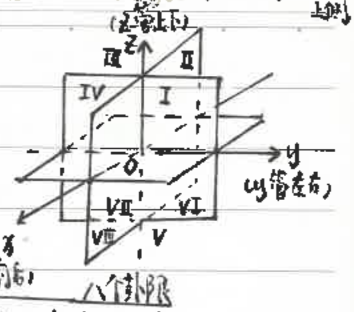
空间直角坐标系的建立：三个坐标轴两两垂直，有相同原点，相同单位长度，且x、y、z轴正方向符合右手系，

即从x轴正方向旋转90°到y轴正方向，大拇指指向z轴正方向

坐标原点：O　坐标轴：横轴x轴，纵轴y轴，竖轴z轴



Date. Page



坐标面：xOy面 yOz面 zOx面

坐标：$M(x,y,z)$（横坐标 纵坐标 竖坐标） 空间点$M \longleftrightarrow$ 三元有序数组(x,y,z)

坐标平面上点的特点：某一分量为0（如$P(x,0,z)\in zOx$平面）

坐标轴上点的特点：两个分量为0（如$Q(0,0,z)\in Oz$轴）

两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离：$|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

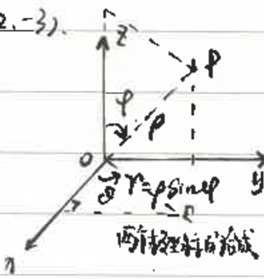
对称点坐标：(1) $M(x,y,z)$关于xOy平面的对称点坐标 $M_{xy}(x,y,-z)$.

(2) $M(x,y,z)$关于Ox轴的对称点坐标$M_{Ox}(x,-y,-z)$

(3) $M(x,y,z)$关于O的对称点坐标 $M_O(-x,-y,-z)$.

例 $M(1,-2,3)$关于yOz对称点 $M_{yz}(-1,-2,3)$，关于Oz对称点 $M_{Oz}(-1,2,3)$，

关于Oy对称点 $M_{Oy}(-1,-2,-3)$，关于O对称点 $M_O(-1,2,-3)$.



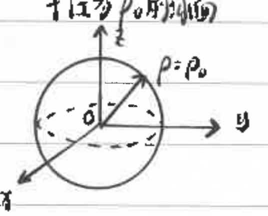
球面坐标系 $M(x,y,z)$与球面坐标系下坐标(ρ,φ,θ)之间建立一一对应关系

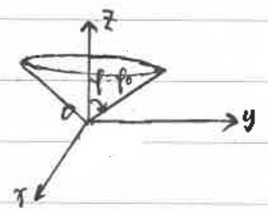
ρ为球径 φ为纬度角 θ为经度角 与直角坐标之间的关系为

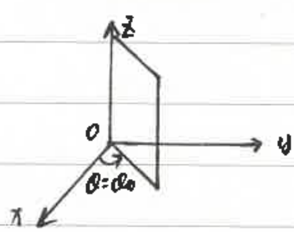
$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \quad 0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

(ρ,φ,θ)的含义：

$\rho=\rho_0\ge 0$表示以原点为球心 半径为ρ_0的球面 　　$\varphi=\varphi_0$表示半顶角为φ_0的圆锥 　　$\theta=\theta_0$表示半平面





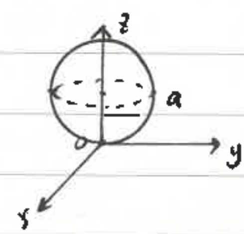


常见的球体 (1) $S: x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 　$\rho=a$

$\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2$ 　$\Omega: \begin{cases} 0\le\rho\le a \\ 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

(2) $S: x^2+y^2+z^2=2az\ (a>0)$ 　$\rho=2a\cos\varphi\ (0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

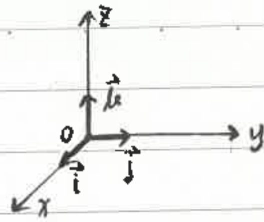
$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2az$ 　$\Omega: \begin{cases} 0\le\rho\le 2a\cos\varphi \\ 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$



4 向量的坐标表示与大小方向表示.

向量的坐标表示：引入三个方向为三个坐标轴正向的单位向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，由$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$构成一组基，空间中任何一个

Date.　　Page.



$\vec{a}$均可由$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$线性表示，且表示法唯一，记$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

（$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$为$\mathbb{R}^3$空间一组基）

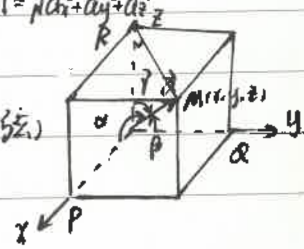
若$\vec{a}$在x,y,z轴的投影分别为a_x,a_y,a_z，则由向量加法知

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$.

当向量起点为坐标原点时，终点坐标$P(x,y,z)$三个值x,y,z即为$\vec{OP}$在三个坐标轴上分量 $\vec{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

$\vec{OP}$与P之间建立一一对应关系，$\vec{OP}$可由终点P坐标表示，即$\vec{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\{x,y,z\}$.

向量的坐标向量表示 $\vec{a}\triangleq\vec{OP}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\{a_x,a_y,a_z\}$　$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$



$\vec{a}$与三个坐标轴的正向夹角α,β,γ称为$\vec{a}$的方向角.

$\vec{a}\neq 0$时 $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}$　$\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}$　$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$（方向余弦）

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=|\vec{a}|(\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k})$

$=|\vec{a}|\vec{a}^0$

∴ 求方向角：同向单位化　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

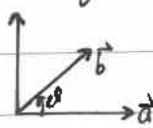
注：$\vec{a}$方向余弦的符号确定$\vec{a}$的指向（上/下　左/右　前/后）

例 $\vec{a}=\{1,-2,2\}$，求与$\vec{a}$同向的单位向量和方向余弦.

$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\}$ ∴ $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$

5. 向量的矢量积：定义：$\vec{a},\vec{b}$的矢量积为矢量 大小 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$　$\vec{a}\times\vec{b}$

方向：$\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a},\vec{b}$构成右手系



叉积（矢量积，外积）的几何意义：$|\vec{a}\times\vec{b}|$为以$\vec{a},\vec{b}$为边的平行四边形的面积

$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

注：叉积无结合律：$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\neq(\vec{a}\times\vec{a})\times\vec{b}$　$(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})$

矢量积满足的算律：(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$　(2) $k(\vec{a}\times\vec{b})=(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})$

(3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$　(4) $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$

数量积与矢量积之间的区别 (1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

矢量积的坐标运算：设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$　$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

则$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}$

$+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}$

$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$ （$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ 循环）

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

注：$\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直（法向量） $\therefore (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b} = 0$.

例1 求与 $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(0,2,1)$ 都垂直的单位向量.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad \therefore \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2).$$

例2. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\theta=\frac{\pi}{3}$. 求(1) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$ (2) $|(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})|$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ $\therefore (2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = -1$

(2) $|(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})| = 5|\vec{a}\times\vec{b}| = 5|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 15\sqrt{3}$

例3. 设 $\vec{a}=\{2,-2,1\}$, $\vec{b}=\{1,0,1\}$ 计算(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ (2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

例4 求 $A(3,0,-2)$ $B(0,1,2)$ $C(5,-1,0)$ 为顶点的三角形面积

$\overrightarrow{AB} = (-3,1,4)$ $\overrightarrow{AC} = (2,-1,2)$

$$\therefore \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 14\vec{j} + \vec{k} \quad \therefore S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{233}}{2}$$

变式：求以 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $C(x_3,y_3)$ 为顶点的三角形面积

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}\right|$$

$$\xlongequal[r_3=r_1+r_3]{r_2=r_1+r_2} \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

注：行列式求导：对第 i 行 $(1\le i\le n)$ 求导，其它行不变，再相加.

$$D(x) = |a_{ij}(x)|_{n\times n} = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}(x)a_{2j_2}(x)\cdots a_{nj_n}(x)$$

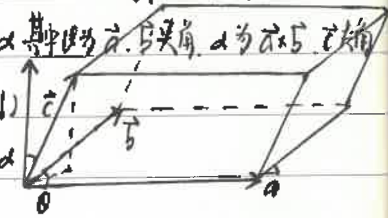
$$\therefore D'(x) = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} [a'_{1j_1}(x)a_{2j_2}(x)\cdots a_{nj_n}(x) + a_{1j_1}(x)a'_{2j_2}(x)\cdots a_{nj_n}(x) + \cdots].$$

Date.　　Page.

每行求导+再逐个相加→每行求导

$$=\underbrace{\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a'_{1j_1(t)}a_{2j_2(t)}\cdots a_{nj_n(t)}}_{\text{对第一行求导其余不变}}+\underbrace{\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1(t)}a'_{2j_2(t)}\cdots a_{nj_n(t)}}_{\text{对第二行求导其余不变}}$$

6.向量的混合积：定义：$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=|\vec a\times\vec b|\cdot|\vec c|\cos\alpha=|\vec a||\vec b|\sin\theta|\vec c|\cos\alpha$ 其中θ为$\vec a,\vec b$夹角，α为$\vec a\times\vec b$，$\vec c$夹角



几何意义：以$\vec a,\vec b,\vec c$为棱的平行六面体体积 ($V_{P-ABC}=\frac{1}{6}|(\vec{PA}\times\vec{PB})\cdot\vec{PC}|$)

轮换性：$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=(\vec b\times\vec c)\cdot\vec a=(\vec c\times\vec a)\cdot\vec b$

矢量$\vec a,\vec b,\vec c$共面的充要条件为$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=0$

三矢共面与四点共面的条件：设$\vec a=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec b=\{b_1,b_2,b_3\}$，$\vec c=\{c_1,c_2,c_3\}$则

$$\vec a,\vec b,\vec c\text{共面}\Leftrightarrow(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot(c_1\vec i+c_2\vec j+c_3\vec k)$$

$$=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0$$

设$A_i=(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3,4)$则

$$\text{四点}A_1,A_2,A_3,A_4\text{共面}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\\x_4-x_1&y_4-y_1&z_4-z_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1&0\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1&0\\x_4-x_1&y_4-y_1&z_4-z_1&0\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3=r_1+r_3\\r_4=r_1+r_4}]{r_2=r_1+r_2}\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x_4&y_4&z_4&1\end{vmatrix}=0$$

注：求过三点的平面方程，以(x,y,z)代(x_1,y_1,z_1)，四点共面。

例：设$A(0,1,0)$ $B(1,0,1)$ $C(4,4,6)$ $D(2,2,3)$ $E(10,14,17)$

(1)求以A.B.C.D为顶点的四面体体积　(2)证明B.C.D.E四点共面

(1) $\vec{AB}=(1,-1,1)$　$\vec{AC}=(4,3,6)$　$\vec{AD}=(2,1,3)$

$$\therefore(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\4&3&6\\2&1&3\end{vmatrix}=1\qquad\therefore V_{A-BCD}=\underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac13\times\frac12}|(AB\times AC)\cdot AD|=\frac{1}{6}$$

(2) $\vec{BC}=(3,4,5)$　$\vec{BD}=(1,2,2)$　$\vec{BE}=(9,14,16)$

$$\therefore(\vec{BC}\times\vec{BD})\cdot\vec{BE}=\begin{vmatrix}3&4&5\\1&2&2\\9&14&16\end{vmatrix}=0\qquad\therefore B.C.D.E\text{四点共面}$$

7. Lagrange恒等式：$(\vec a\cdot\vec b)^2+|\vec a\times\vec b|^2=|\vec a|^2\cdot|\vec b|^2$ （作用：简化叉乘运算 $|\vec a\times\vec b|^2=|\vec a|^2\cdot|\vec b|^2-(\vec a\cdot\vec b)^2$）

证明：设$\vec a,\vec b$夹角为θ，则$\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\theta$，$|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin\theta$

$\therefore(\vec a\cdot\vec b)^2+|\vec a\times\vec b|^2=|\vec a|^2|\vec b|^2$

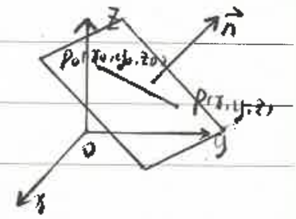
推论: $(\vec a\cdot\vec b)^2\le|\vec a|^2|\vec b|^2 \Rightarrow |\vec a\cdot\vec b|\le|\vec a|\cdot|\vec b|$ Cauchy-Schwarz不等式

§ 平面方程

平面的确定: (1) 不共线三点 $\xrightarrow{推论}$ (2) 两条相交直线 (3) 直线与直线外一点 (4) 两条平行直线 (5) 过某定点M_0且与固定向量$\vec n$垂直

平面方程定义: 若满足 $f(x,y,z)=0$ 的点 $M(x,y,z)$ 都落在π上, 且π上的点 $M(x,y,z)$ 都满足此方程, 则称 $f(x,y,z)$ 为π的方程.

平面的点法式方程: 过$P_0(x_0,y_0,z_0)$且与$\vec n=(A,B,C)\ne\vec 0$垂直的平面



$\forall P(x,y,z)\in\pi$, $\overrightarrow{P_0P}\perp\vec n \Rightarrow \overrightarrow{P_0P}\cdot\vec n=0$

$\therefore A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (点法式方程 $(P_0,\vec n)$)

$\vec n=(A,B,C)\ne\vec 0$ 称为π的法向量

平面的一般方程: 记 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ $\therefore Ax+By+Cz+D=0$ (A,B,C不全为0) (平面的一般方程)

注: 若$P_0(x_0,y_0,z_0)$满足该方程, 则 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ 相减得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$\therefore \overrightarrow{P_0P}\perp\vec n$ $\therefore$ P落在过P_0与$\vec n$垂直的平面上. $\therefore$ 平面可以关于x,y,z三元一次方程表示, 任何一个关于x,y,z三元一次方程均代表一张平面.

特殊形式的平面: (1) $D=0$ π过原点, (2) $A=0$, π∥Ox轴 ($\vec i\perp\vec n=(0,B,C)$)

(3) $A=B=0$ π∥xOy平面 π: $z=-\frac{D}{C}\triangleq z_0$

(4) $A=D=0$ π过Ox轴 (π∥Ox+π过O) (5) $A=B=D=0$ π: $z=0$ 为xOy平面 (π∥xOy+π过O)

例1 求过 $P_1(1,0,-1)$ $P_2(2,-2,0)$ $P_3(0,-1,3)$ 的平面方程.

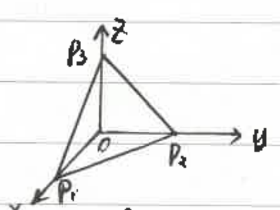
法一 点法式 $\vec n=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&-2&1\\-1&-1&4\end{vmatrix}=-7\vec i-5\vec j-3\vec k$

取$P_1(1,0,-1)$ $\therefore$ π: $7(x-1)+5y+3(z+1)=0 \Leftrightarrow 7x+5y+3z-4=0$

法二 一般式 设 $Ax+By+Cz+D=0$ 代入得 $\begin{cases}A=-\frac{7}{4}D\\B=-\frac{5}{4}D\\C=-\frac{3}{4}D\end{cases}$ $\therefore 7x+5y+3z-4=0$

平面的截距式方程: 过$P_1(a,0,0)$ $P_2(0,b,0)$ $P_3(0,0,c)$的平面 ($abc\ne0$)

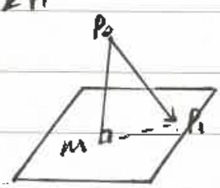
设π: $Ax+By+Cz+D=0$ 代入得 $\begin{cases}A=-\frac{D}{a}\\B=-\frac{D}{b}\\C=-\frac{D}{c}\end{cases}$ $\therefore$ π: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (截距式方程)



注 (1) $V_{O-P_1P_2P_3}=\frac{1}{6}|abc|$

(2) 空间勾股定理: $S^2_{\triangle P_1P_2P_3}=S^2_{\triangle OP_1P_2}+S^2_{\triangle OP_2P_3}+S^2_{\triangle OP_1P_3}$

点到平面的距离: 求$P_0(x_0,y_0,z_0)$到π: $Ax+By+Cz+D=0$的距离



过P_0作π的垂线P_0M交π于$M(x,y,z)$, 在π上任取$P_1(x_1,y_1,z_1)$

则 $d=|\overrightarrow{P_0M}|$，为 $\overrightarrow{P_0P_1}=\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}$ 在单位法向量 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\{A,B,C\}$ 上的投影，

$$\therefore d=|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{n}|=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

又 $P_1\in\pi$ $\therefore Ax_1+By_1+Cz_1=-D$

$$\therefore d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例. 求 O 到 $\pi: x-2y+2z=3$ 的距离.

$$d=\frac{|-3|}{\sqrt{1+4+4}}=1 \Rightarrow (x^2+y^2+z^2)_{min}=d^2=1$$

变式. 设 $x-2y+2z=3$，求 $x^2+y^2+z^2$ 最小值.

由Cauchy不等式知 $[1^2+(-2)^2+2^2](x^2+y^2+z^2)\geq(x-2y+2z)^2=9$ $\therefore(x^2+y^2+z^2)_{min}=1$

不共线三点确定的平面方程：过不共线三点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$ 的平面.

在ABC上任取 $M(x,y,z)$，则 A,B,C,M 共面

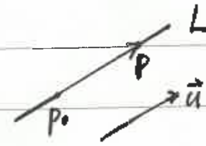
$$\pi:\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

9. 直线的方程

直线的确定：(1) 两点确定一条直线 (2) 两个相交平面确定一条直线 (3) 过直线外一点与已知直线平行 (平行公理)

注：直线斜率本质上表示直线的方向

直线的点向式方程：过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 与已知方向 $\vec{u}=\{l,m,n\}$ 平行的直线.



在所求直线L上任取一点 $P(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{u}$

$\therefore \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ (点向式方程 $(M,\vec{u})$)（对称式方程）.

注. 允许 1-2 个分母为0（即分子为0）

直线的参数方程：令 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$ 则 $\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}$（参数方程）

注. 一般在求直线与曲面(平面)交点时经常用到

（得到关于参数t的一元方程）

注. $A(1,1,1)$，$B(4,6,8)$

直线AB：$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{7}\triangleq t$

线段AB：$\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+5t\\ z=1+7t.\end{cases}$ $(0\leq t\leq 1)$

例. 求 $L: \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{2}=z-4$ 与 $\pi: x-2y+2z-5=0$ 交点，

法一. 参数方程（消元） $L: \begin{cases}x=3+2t\\ y=4+2t\\ \ldots\end{cases}$ 代入 π 得. $(3+2t)-2(4+2t)+2(4+t)-5=0 \Leftrightarrow t=-1$

∴交点 $M(1,2,3)$

法二 联立 $\begin{cases} x-3=y-4 \\ x-3=2(z-4) \\ x-2y+2z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

直线的一般方程：设 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 且其法向量 $\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ 不平行，则两平面相交，其交线为 L：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$（一般方程）

直线的一般方程与对称方程的转化：一般表示 L 的方向 $\vec{S}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$，在 L 上任取 $M(x_0,y_0,z_0)$，又 $\vec{S}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}\xlongequal{令}\{l,m,n\}$，

$$\therefore L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

另：在 L 上任取两点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2)$，$L: \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$（类比点向式）

点线面之间的关系

平面方程 (1) 点法式 $(M_0,\vec{n})$ $\pi: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

(2) 一般式 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$

(3) 截距式 $\pi: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(abc\neq0)$

注 O 到 $\pi: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 距离为 h $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=h \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$

直线方程 (1) 点向式 $(M,\vec{s})$. $L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

(2) 一般式 $L: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

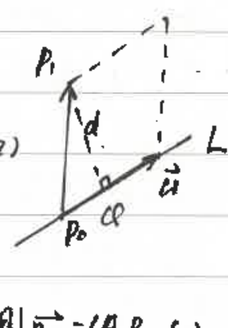
注 一般式化点向式：法一 任取 $M(x_0,y_0,z_0)\in L$，$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

法二 任取 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)\in L$，$L: \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

(3) 参数式 $L: \begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$ ($t\in\mathbb{R}$ 为参数)

用于求交点

点到直线的距离 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到 $L: \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$ 的距离



取 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in L$，则 P_1 到 L 距离 d 是以 $\vec{P_0P_1}$ 与直线方向 $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ 为边组成的平行四边形的高：$d=\frac{|\vec{u}\times\vec{P_0P_1}|}{|\vec{u}|}$

另：可求过 P_1 与 L 垂直的平面与 L 的交点 Q（垂足），$d=|P_1Q|$

平面与平面之间的关系 设 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则 $\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$. (1) $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}//\vec{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

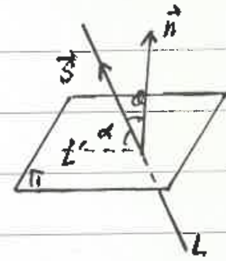
(2) π_1，π_2 相交时，其夹角 θ $(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$ 为两法向量之间的夹角 $\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$.

(3) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

直线与平面之间的关系：设 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$. $L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ （记π法向量$\vec{n}$，L方向$\vec{s}$）.

(1) $L \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{s} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{s}=lA+mB+nC=0$.

注：$L\subset\pi \Leftrightarrow \begin{cases} L\parallel\pi \\ L\cap\pi\neq\phi \end{cases}$ （或直线上有两个不同的点在平面上）



(2) L与π相交（唯一交点）$\Leftrightarrow \vec{n}\not\perp\vec{s} \Leftrightarrow lA+mB+nC\neq0$

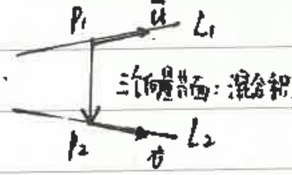
(3) L与π夹角α为L与其在π上投影L'之间夹角. $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$

$$\sin\alpha=|\cos\theta|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}$$

直线与直线之间的关系：设 $L_1: \frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3}$. $L_2: \frac{x-x_2}{v_1}=\frac{y-y_2}{v_2}=\frac{z-z_2}{v_3}$

在直线上取点 $P_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1$, $P_2(x_2,y_2,z_2)\in L_2$, 方向分别为 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

(1) L_1, L_2共面 $\Leftrightarrow (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0$.

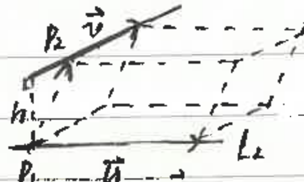


三向量共面：混合积.

(2) L_1, L_2异面 $\Leftrightarrow (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\neq0$

异面直线的距离d：平行六面体的高 （投影求体高）

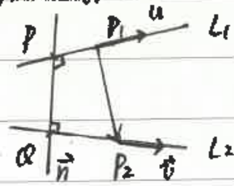
$$d=\frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$



另：找公垂线

法一、公垂线方向 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}$. d为$\overrightarrow{P_1P_2}$在$\vec{n}$投影

$$d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{n}|}$$



法二、求垂足. 将L_1, L_2写作参数方程形式. 设P, Q（两个未知数）

又 $\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{s_1}=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{s_2}=0 \end{cases}$ （两个约束）. 联立解得P, Q坐标. 从而$d=|\overrightarrow{PQ}|$.
（P, Q唯一）

例1. 求过$M_0(1,-2,3)$且与$\pi: 2x-3y+4z+12=0$垂直的L的方程并计算M_0关于π对称点B坐标.

$\vec{s}=\vec{n}=\{2,-3,4\}$, $\therefore L: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{4}$.

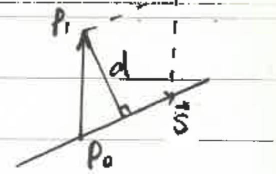
对称点：求线面交点（参数方程）作对称

$L: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=4+4t \end{cases}$ 代入得 $t=-1$ $\therefore$ 交点 $(-1,1,-1)$ $\therefore B(-3,4,-5)$.

例2. 求过$M_0(-1,2,3)$且与 $l: \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=3 \end{cases}$ 平行的直线.

$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=3\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k}$. $\therefore \vec{s}=\{3,-4,-5\}$, $L: \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-5}$

例3. 求$P_1(3,-1,2)$到$L:\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$距离.



$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=-3\vec{j}-3\vec{k}$

取$P_0(1,0,2)$. $\overrightarrow{P_0P_1}=(2,-1,0)$. $\vec{s}\times\overrightarrow{P_0P_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&-3&-3\\2&-1&0\end{vmatrix}=-3(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})$

$\therefore d=\dfrac{|\vec{s}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{s}|}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

例4. 求过$M_0(-1,0,4)$,且与$\pi: 3x-4y+z-10=0$平行,又与$L: x+1=y-3=\frac{z}{2}$相交的l.

法一. 过M_0与π平行的平面: $\pi': 3(x+1)-4y+(z-4)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+z-1=0$.

$L\cap\pi'=M_1(15,19,32)$ $\therefore MM': \dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$. (线面平行:在面内 线线相交:过交点.)

法二. $L:\begin{cases}x-y+4=0\\2x-z+2=0\end{cases}$ $\therefore$过L的平面束: $(x-y+4)+\lambda(2x-z+2)=0$.

代入M_0: $\pi_1: 10x-4y-3z+22=0$ (线线相交:在面内 线面平行:在面内)

过M_0与π平行平面π': $3x-4y+z-1=0$. $\therefore l:\begin{cases}10x-4y-3z+22=0\\3x-4y+z-1=0\end{cases}$

例5. 确定$L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $L_2: \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{2}$之间的位置关系.

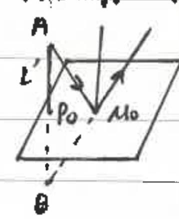
L_1过$M_1(1,-1,1)$. $\vec{s}_1=(1,2,1)$ L_2过$M_2(-1,1,5)$ $\vec{s}_2=(-1,1,2)$ $\therefore\overrightarrow{M_1M_2}=\{-2,2,4\}$

$\because(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0$ $\therefore$两直线共面 又$L_1\nparallel L_2$ $\therefore L_1,L_2$相交.

点到直线、平面的距离: 设$M_0(x_0,y_0,z_0)$, $L: \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$, $\pi: Ax+By+Cz+D=0$

(1) M_0到π距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (2) M_0到L距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$ $(M\in L)$

例: $A(1,2,3)$处点光源沿$\vec{v}=\{-1,5,3\}$发出光线,求经过$S: 2x+y+2z-1=0$反射后,反射光线所在方程



入射光线$L: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{3}$ $\therefore L:\begin{cases}x=1-t\\y=2+5t\\z=3+3t\end{cases}$ 代入S得$t=-1$

$\therefore M_0(2,-3,0)$

过A作S垂线$L': \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$ $L'\cap S=P_0(-1,1,1)$.

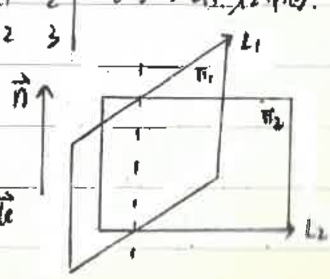
$\therefore B(-3,0,-1)$. $\therefore l=M_0B: \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z}{1}$.

例2. 证明$l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-7}{2}$与$l_2: \dfrac{x-10}{10}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-6}{3}$异面,并求公垂线方程.

$M_1(1,3,7)$ $M_2(10,4,6)$ $\therefore\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=\begin{vmatrix}9&1&-1\\2&-1&2\\10&2&3\end{vmatrix}=63\Rightarrow l_1,l_2$异面.

公垂线方向$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&2\\10&2&3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}+14\vec{k}$

$\therefore\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$



法二. 过l_i且与$\vec{n}$平行的平面$\pi_i(i=1,2)$的法向量$\vec{n}_1=\vec{u}\times\vec{n}=-6\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$

$\vec{n}_2=\vec{v}\times\vec{n}=-2\vec{i}-23\vec{j}+22\vec{k}$

$\therefore\pi_1: 2x+2y-z-1=0$ $\pi_2: 2x+23y-22z+20=0$

Date.　　　Page.

$\therefore l = \pi_1 \cap \pi_2 \quad \therefore l: \begin{cases} 2x+2y-z-1=0 \\ 2x+23y-12z+20=0. \end{cases}$

法二 设公垂线与 l_1, l_2 交点为 P, Q. 设 $P(1+2t_1, 3-t_1, 7+2t_1)$, $Q(10+10t_2, 4+2t_2, 6+3t_2)$.

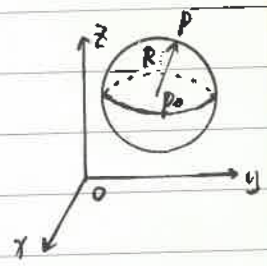
$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9t_1+24t_2+15=0 \\ -24t_1+113t_2+89=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=-1 \\ t_2=-1 \end{cases} \quad \therefore P(-1,4,5)\quad Q(0,2,3)$

$\therefore PQ: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{2}$

注: $d = |\overrightarrow{PQ}| = 3$ 或 $d = \dfrac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = 3$

11. 曲面与曲线

曲面方程定义: 若满足 $f(x,y,z)=0$ 的点 $M(x,y,z)$ 皆落在 S 上, 且 S 上的点 $M(x,y,z)$ 皆满足此方程, 则称 $f(x,y,z)=0$ 为曲面 S 的方程.



球面: 到定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 距离为 $r>0$ 的点的轨迹 $S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

S 表示以 P_0 为球心, r 为半径的球面.

例1. 计算 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 4$ 被 $x+y+z=3$ 所截得的截面积.

$d = \dfrac{3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3} \qquad S = \pi(R^2-d^2) = \pi$

例2. 球心位于 $L: \begin{cases} 2x+4y-z-7=0 \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$ 且球面与 $\pi_1: x+2y-2z-2=0$, $\pi_2: x+2y-2z+4=0$ 相切, 求球面方程

法一. π_1, π_2 距离 $d = \dfrac{6}{\sqrt{1+2^2+2^2}} = 2$ 　与 π_1, π_2 距离为 1 平面 π: $x+2y-2z+1=0$

L 方向 $\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ 　$\therefore \vec{s} = 9\vec{i}-6\vec{j}-6\vec{k}$ 取 $M_0(2,1,1)\in L$.

$\therefore L: \begin{cases} x=2+9t \\ y=1-6t \\ z=1-6t \end{cases}$ (求交点化参方). 　$\therefore L\cap\pi = P_0(-1,3,3)$ 为球心.

$S: (x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1.$

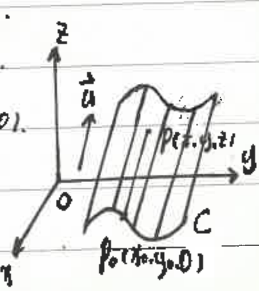
法二. 设 $M(2+9t, 1-6t, 1-6t)\in L$

$r = \dfrac{|2+9t+2(1-6t)-2(1-6t)-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \dfrac{|2+9t+2(1-6t)-2(1-6t)+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} \Rightarrow t=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore M(-1,3,3)$, $r=1$ 　$\therefore S: (x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$

注: 两平行平面 $\pi_i: Ax+By+Cz+D_i=0\ (i=1,2)$ 的距离 $d = \dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

柱面: 直线沿一条曲线平行移动所生成的曲面称为柱面, 直线称为母线, 曲线称为准线.



求柱面方程: 追根溯源. 设准线 $C: \begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 母线方向 $\vec{u}=\{l,m,n\}$ $(n\ne 0)$.

$\forall P\in S$, $\exists P_0\in C$ s.t. $\overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{u}$

$\therefore \dfrac{x_0-x}{l} = \dfrac{y_0-y}{m} = \dfrac{0-z}{n} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x-\dfrac{l}{n}z \\ y_0 = y-\dfrac{m}{n}z \end{cases}$

又 $f(x_0,y_0)=0$ ∴ $S: f(x-\frac{l}{n}z,\ y-\frac{m}{n}z)=0$.

常见柱面：椭圆柱面 $S_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　$C_1: \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$　　$\vec{s}$ // z轴

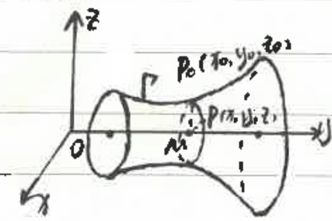
抛物柱面 $S_2: y^2=2px$　$C_2: \begin{cases} y^2=2px \\ z=0\end{cases}$　$\vec{s}$ // z轴.

准线为三角形、四边形时得三棱柱、四棱柱.

例. 以 $C: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 为准线，母线平行于 $\vec{s}=\{1,0,-1\}$ 的柱面方程.

$S: f(x+z,\ y) = (x+z)^2+y^2-1=0$　∴ $S: x^2+y^2+z^2+2zx=1$.

旋转曲面：曲线 $\Gamma: \begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕y轴旋转一周所得旋转体方程.

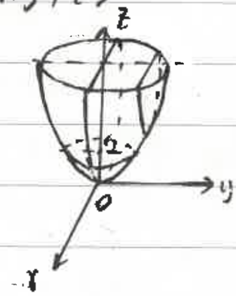


求曲面方程：追根溯源　$\forall P\in S$，$\exists P_0\in\Gamma$ s.t. $P_0M=PM$

∴ $|z_0|=\sqrt{z^2+x^2}$　又 $f(y_0,z_0)=0$

∴ $S: f(y,\ \pm\sqrt{z^2+x^2})=0$　　(绕哪轴，哪轴不变，另一个变为 $\pm\sqrt{(\ )^2+(\ )^2}$)

常见旋转曲面：$\Gamma: \begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所得曲面方程 $S: f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)$



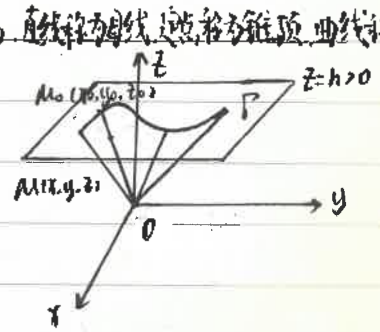
旋转抛物面 $S: z=x^2+y^2$　　$\Gamma: \begin{cases} z=y^2 \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周

例. $C: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ $(a,b>0)$ 分别绕x、y轴旋转一周所得立体.

绕x轴：$S_x: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$　　绕y轴：$S_y: \frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　椭球面.

锥面：一条直线过一定点，沿不过此定点的一条曲线移动所生成的曲面称为锥面. 直线称为母线，定点称为锥顶，曲线称为准线

准线 $\Gamma: \begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=h \end{cases}$，锥顶为O所得锥面



母线

求锥面方程：追根溯源　$\forall M\in S$ $\exists M_0\in\Gamma$ s.t. $\overrightarrow{OM_0}\ //\ \overrightarrow{OM}$

∴ $\frac{x_0}{x}=\frac{y_0}{y}=\frac{z_0}{z}$　　$z_0=h$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0=h\frac{x}{z} \\ y_0=h\frac{y}{z} \end{cases}$　∴ $S: f(h\frac{x}{z},\ h\frac{y}{z})=0$

常见锥面：准线是圆，锥顶过圆心且与圆所在平面垂直的直线 l 上：正圆锥；锥顶 $\notin l$：斜圆锥

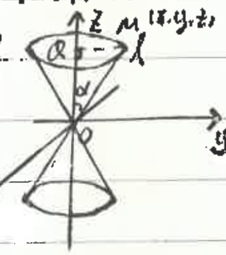
准线是三角形、四边形：锥面为三棱锥、四棱锥

例：求 $C:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$，锥顶在 O 的锥面方程.

$S:\ (x\frac{1}{z})^2+(y\frac{1}{z})^2=1 \quad \therefore S:\ x^2+y^2=z^2$ 为圆锥

注：圆锥面可看作两条相交直线中一条直线绕另一条直线旋转所得曲面，母线与轴之间的夹角称为圆锥的半顶角.

设 ℓ 与 z 轴夹角为 α，$\forall M(x,y,z)\in S$，过 M 作与 z 轴垂直的平面且与 z 轴交于 Q.



$\therefore \tan\alpha=\frac{|QM|}{|OQ|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|}$

$\therefore S:\ z^2=k^2(x^2+y^2)$，$k=\cot\alpha>0$.

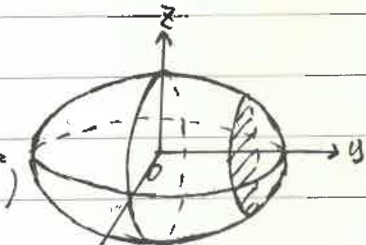
上例中 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ $\therefore S:\ z^2=x^2+y^2$（上半圆锥：$z=\sqrt{x^2+y^2}$）.

二次曲面：关于 x, y, z 的三元二次方程 $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2yz+b_3zx+c_1x+c_2y+c_3z+d=0$ 所表示的曲面称为二次曲面，其中 $a_i, b_i, c_i\ (i=1,2,3)$，d 为常数.

(1) 椭球面：$S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$.

用垂直 y 轴的平面 $y=y_0$ 截 S 得截面

$A:\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y_0^2}{b^2} \\ y=y_0 \end{cases}$ $(|y_0|\le b)$. $S(y_0)=\pi ca\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)$

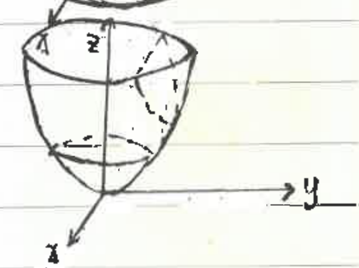


(2) 椭圆抛物面：$S:\ z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ (a,b>0)$

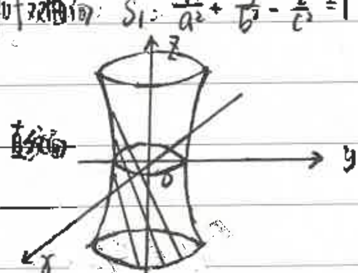
用垂直 z 轴的平面 $z=z_0>0$ 截 S 得椭圆 $\Gamma_{z_0}:\begin{cases} z_0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \\ z=z_0 \end{cases}$

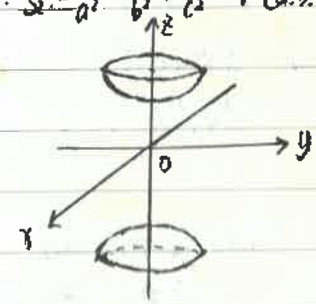
用垂直于 x 轴或 y 轴的平面（$y=y_0$）截 S 得抛物线 $\Gamma_{y_0}:\begin{cases} z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} \\ y=y_0 \end{cases}$

此法称为截痕法.

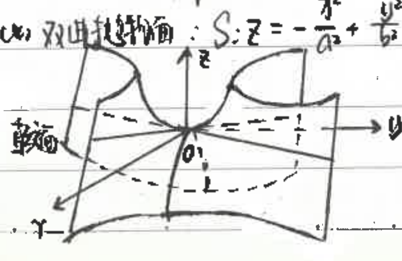


(3) 单叶双曲面：$S_1:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$　　双叶双曲面：$S_2:\ -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$.





(4) 双曲抛物面：$S:\ z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ (a,b>0)$.（马鞍面）

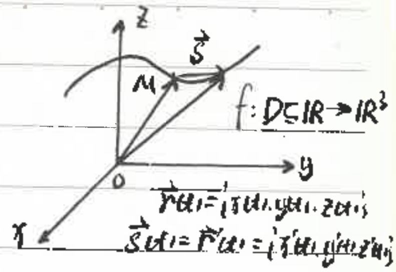


鞍点 O 处偏导 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 都等于 0，但不是极值点，

（任何一个邻域内都有比它小、比它大的点）

空间曲线的表示：

空间曲线的参数方程表示：$C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} (\alpha\le t\le\beta)$.

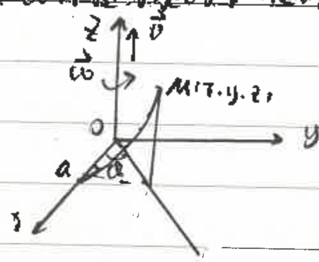


例1 求圆柱螺旋线(螺纹线)的参数方程

M(x,y,z)沿z轴正方向以v作匀速直线运动，又绕z轴以$r=a(a>0)$，ω作匀速圆周运动，求M运动轨迹.

设M起始位于(a,0,0)处，经时间t后 $\theta=\omega t$.

$\therefore C:\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}$



记$\omega t=u$，$\frac{v}{\omega}=b$，则 $C:\begin{cases} x=a\cos u \\ y=a\sin u \\ z=bu \end{cases}$

M绕z轴一周后 $\Delta z=2\pi b$ 称螺距

空间曲线的一般方程：空间曲线可看成两张曲面的交线，即 $C:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

例1 $C_1:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=2 \end{cases}$ 可化为 $C_2:\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=2 \end{cases}$ 表示平面z=2上，圆心在(0,0,2)，$r=\sqrt{5}$的圆.

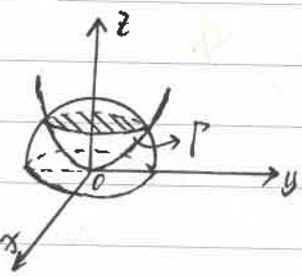
其参数方程 $C_3:\begin{cases} x=\sqrt{5}\cos\theta \\ y=\sqrt{5}\sin\theta \\ z=2 \end{cases} (0\le\theta\le2\pi)$

例2 记Ω为 $S_1: x^2+y^2+z^2=2$，$S_2: z=x^2+y^2$ 所围成的立体.

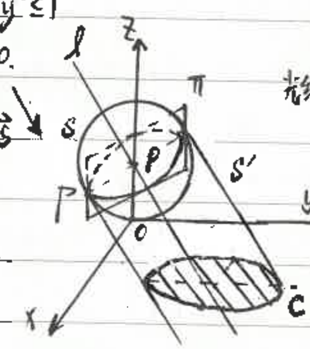
求Ω在xoy平面上的投影区域.

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ ∴交线投影 $C:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

∴投影区域 $D:\begin{cases} x^2+y^2\le1 \\ z=0 \end{cases}$



光线→柱面



例3 设平行于$L: x=y=-z$的光线照射到透明的球面$S: x^2+y^2+z^2=2z$，$\vec{s}$

求球面在xoy平面上留下的阴影部分边界曲线方程

$\vec{s}=\{1,1,-1\}$　$S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 球心$P(0,0,1)$

求柱面：法一：准线+方向. 过P作$\pi\perp L$，$\pi: x+y-z+1=0$.

$\Gamma:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$

$\forall M\in S'$，$\exists M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$ s.t. $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{s}$　∴ $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{-1}\triangleq t$

$\because M_0\in\Gamma:\begin{cases} (x-t)+(y-t)-(z-t)+1=0 \\ (x-t)^2+(y-t)^2 \ldots \end{cases}$

消去t得 $S': x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx-x-y-2z=\frac{1}{2}$.

$C=S'\cap xoy$ $\therefore C:\begin{cases} x^2+y^2-xy-x-y=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$

法二 轴线+距离 过P_0作 $l \parallel L$ $\therefore l: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$

$\forall M(x,y,z)\in S'$ M到l距离为$r=1$

$d=\frac{|\overrightarrow{P_0M}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|} \Leftrightarrow \frac{1}{3}[(-y-z+1)^2+(x-z-1)^2+(x-y)^2]=1$

$\therefore S': x^2+y^2+z^2-xy+yz-zx-x-y-2z=\frac{1}{2}$.

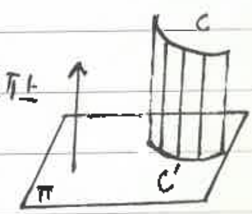
曲线的参数化：例 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

消去z得 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{配方}} (x+\frac{y}{2})^2+\frac{3y^2}{4}=4$

令 $\begin{cases} x+\frac{y}{2}=2\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=2\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2\cos\theta-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta \\ y=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\theta \\ z=-2\cos\theta-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$.

面与曲线的投影

定义：以空间曲线C为准线，以平面π法向量$\vec{n}$为母线方向的柱面称为C在π上的投影柱面，此投影柱面与π的交线称为C在π上的投影曲线。



对一般式Γ: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 消去z得 $H(x,y)=0$

称 $S: H(x,y)=0$ 为Γ在xoy的投影柱面. $C:\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 称为Γ在xoy投影曲线.

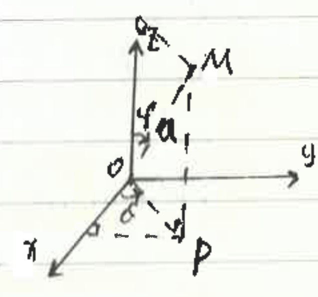
例：计算 $\pi: x+y+z=0$ 截 $\Omega: x^2+y^2\le 1$ 所得截面面积.

$C=\pi\cap\Omega$ 为椭圆. C在xoy投影 $D:\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$

$\vec{n}=\{1,1,1\}$ $S=\frac{\pi}{|\cos\gamma|}=\sqrt{3}\pi$

曲面的参数方程：类似曲线，曲面有两参数.

球面的参数方程：利用经纬度表示



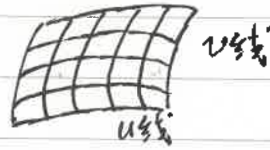
$\forall M(x,y,z)\in S$. $\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta \\ y=a\sin\varphi\sin\theta \\ z=a\cos\varphi \end{cases}$

$\therefore S:\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta \\ y=a\sin\varphi\sin\theta \\ z=a\cos\varphi \end{cases}$ $(0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi)$.

曲面方程：(1) 显式曲面：$z=f(x,y)$

(2) 隐式曲面：$F(x,y,z)=0$

(3) 参数曲面：$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$



例1. 求圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的参数方程.

令 $z=r\geq 0$ 则 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=r \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} 0\leq\theta<2\pi \\ 0\leq r<+\infty \end{matrix}\right)$.

例2. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的参数方程.

令 $z=r^2\ (r\geq 0)$，则 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=r^2 \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} 0\leq\theta<2\pi \\ 0\leq r<+\infty \end{matrix}\right)$

例3. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 的参数方程.

$S:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} 0\leq\theta<2\pi \\ z\in\mathbb{R} \end{matrix}\right)$

Euclid空间上的基本定理

平面点集与多元函数

n维欧氏空间 定义：$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,n\}$

$\mathbb{R}^n$中的元素由n个实数x_i $(i=1,2,\cdots,n)$组成的有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称其为$\mathbb{R}^n$中的一个点.

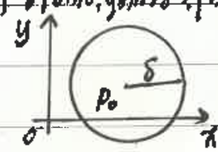
$\mathbb{R}^n$中满足条件P的所有点组成的集合D称为$\mathbb{R}^n$中的点集. $D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid(x_1,x_2,\cdots,x_n)满足条件P\}$

$\mathbb{R}^n$中定义两点$A(x_1,\cdots,x_n)$, $B(y_1,\cdots,y_n)$之间的距离 $d=|AB|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$，定义后称$\mathbb{R}^n$为n维欧氏空间.

$\mathbb{R}^2$中的邻域 圆邻域：设$P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 定义$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$为$P_0(x_0,y_0)$的$\delta$-邻域

若上述邻域不包括中心P_0 称为P_0的去心邻域. 即

$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$

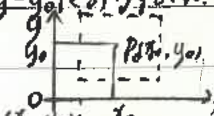


方邻域：设$P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 定义$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$为$P_0(x_0,y_0)$的$\delta$-邻域.

$x\neq x_0 \vee y\neq y_0$

P_0的去心邻域：$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\ 且(x,y)\neq(x_0,y_0)\}$

$x\neq x_0\wedge y\neq y_0$

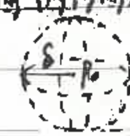


注：(1) $\mathring{U}(P_0,\delta)\neq\{(x,y)\mid 0<|x-x_0|<\delta,\ 0<|y-y_0|<\delta\}$

(2) 圆邻域、方邻域等价：圆里有方（内接正方形），方里有圆（内切圆）.

$\mathbb{R}^3$中的邻域 $U(M_0,\delta)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$

$\mathring{U}(M_0,\delta)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$



平面点集 对于非空点集$D\subseteq\mathbb{R}^2$.

(1) 内点：对于P_0 若$\exists\delta>0$ s.t. $U(P_0,\delta)\subseteq D$ 则称P_0为D的内点. D的所有内点组成的集合称为D的内部. 记作 int D.

(2) 外点：对于P_0 若$\exists\delta>0$ s.t. $U(P_0,\delta)\cap D=\varnothing$ 则称P_0为D的外点.

(3) 界点：对于P_0 若$\forall\delta>0$; $U(P_0,\delta)\cap D\neq\varnothing$ 且 $U(P_0,\delta)\cap D^c\neq\varnothing$.

则称P_0为D的界点. D的所有界点组成的集合称为D的边界. 记作∂D.

聚点 对于非空点集$D\subseteq\mathbb{R}^2$

(1) 聚点：对于P 若$\forall\delta>0$ $\mathring{U}(P,\delta)\cap D\neq\varnothing$ 则称P为D的聚点. 聚点可属于D 也可不属于D.

结论：P为D的聚点 $\Leftrightarrow$ P的任一邻域内包含D的无穷多个点.

(2) 孤立点：对于$P\in D$ 若$\exists\delta_0>0$ s.t. $\mathring{U}(P,\delta_0)\cap D=\varnothing$. 则称P为D的孤立点.

结论：①孤立点是界点 $(P\in D\Rightarrow U(P,\delta_0)\cap D=\{P\}\neq\varnothing)$. 但不是聚点.

°2 内点一定是聚点，

°3 既不是聚点，又不是孤立点，一定是外点。

例1. 对于 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}\cup\{(1,2)\}$.

(1) 满足 $x^2+y^2<1$ 的点均为 D 的内点。 $P(1,2)$ 不是 D 的内、外点，而是 D 的界点。

$x^2+y^2=1$ 上的点也是 D 的界点。

(2) D 的内点 $\in D$. D 的外点 $\notin D$. 界点可能属于 D，也可能不属于 D. $P(1,2)$ 为孤立点。

例2. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\le 1\}$.

(1) 满足 $0<x^2+y^2<1$ 的点均为 D 的内点， (2) $x^2+y^2=1$ 上的点是 D 的界点，

(3) $O(0,0)$ 也是 D 的界点， $\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}\cup\{(0,0)\}$.

(4) 满足 $x^2+y^2\le 1$ 的所有点，均为 D 的聚点。

平面点集的分类. 设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$. (1) 若 $D=\operatorname{int} D$，则称 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开集

(2) 若 D 的所有聚点都属于 D，则称 D 为闭集

约定：$\mathbb{R}^2$ 与 $\varnothing$ 既为开集又为闭集

(3) 若 $\exists M>0$ s.t. $D\subset U(O,M)$，则称 D 为有界集。

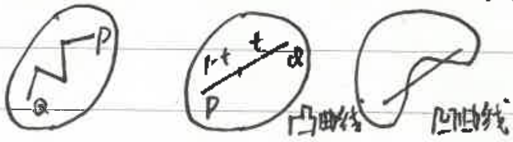
结论：D 为 $\mathbb{R}^2$ 上有界点集 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 矩形区域 $[a,b]\times[c,d]\supseteq D$.

(4) 若 $D(\subseteq\mathbb{R}^2)$ 中 $\forall P,Q$ 之间都可以用一条属于 D 的有限折线(由有限条直线段连接而成的折线)相连接，

则称 D 是连通的。

(1) 连通的开集称为开域

(2) 开域连同其边界上的点组成的集合称为闭域



$\forall\, tP+(1-t)Q\in D$.

例. $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4\}$，有界，连通，为闭域，称为有界闭区域

$D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\le 4\}$ 既不是开集，也不是闭集

$D_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy>0\}$，为开集，但不连通，不是开域；为无界点集.

区域的直径：D 的直径 $d(D)=\sup\limits_{P_1,P_2\in D}\rho(P_1,P_2)$，其中 $\rho(P_1,P_2)$ 表示 P_1,P_2 之间的距离

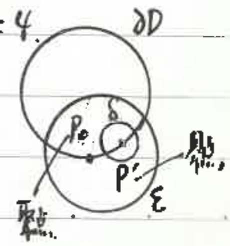
三角不等式：$\forall P_1,P_2,P_3\in\mathbb{R}^2$ 有 $\rho(P_1,P_3)\le\rho(P_1,P_2)+\rho(P_2,P_3)$

例1. $D_1=\{(x,y) \mid 0<x^2+y^2\le 1\}$, $d=2$. $D_2=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2\le 4\}$ $d=4$.

例2. 证明：$\forall D\subseteq\mathbb{R}^2$，$\partial D$ 恒为闭集

只需证 $\forall P_0$，若 P_0 为 ∂D 聚点，则 $P_0\in\partial D$.

若 P_0 为 ∂D 聚点，则 $\forall\varepsilon>0$: $\mathring{U}(P_0,\varepsilon)\cap\partial D\ne\varnothing$



$\because \exists P' \in \mathring{U}(P_0, \varepsilon) \cap \partial D \Rightarrow P' \in \partial D,\ \rho(P', P_0) < \varepsilon$. 联系

取 $\delta = \varepsilon - \rho(P_0, P') > 0$. $\forall P \in U(P', \delta)$. $\rho(P, P_0) \le \rho(P_0, P') + \rho(P, P')$

$< \rho(P_0, P') + \delta = \varepsilon$ $\therefore P \in U(P_0, \varepsilon) \Rightarrow U(P', \delta) \subset U(P_0, \varepsilon)$.

又 $P' \in \partial D$ $\therefore U(P', \delta)$ 中即有属于D的点，又有不属于D的点.

$\because U(P', \delta) \subset U(P_0, \varepsilon)$ $\therefore U(P_0, \varepsilon)$ 中即有属于D的点，又有属于D的点.

由 ε 的任意性得 $P_0 \in \partial D$ $\therefore \partial D$ 为闭集

面点集的完备性理论.

极限：设 $\{P_n\}$ 为平面点列. $\exists P_0 \in \mathbb{R}^2$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ $\forall n > N$: $P_n \in U(P_0, \varepsilon)$ 则称 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0.

记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0$.

若 $P_n(x_n, y_n)$ $P_0(x_0, y_0)$ 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \rho(P_n, P_0) = 0$.

结论：P_0 为D的聚点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0$ ($P_n \in D$ 且 $P_n \ne P_0$)

Cauchy收敛准则：$\{P_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$. $\exists N > 0$ $\forall n > N$. $\forall p \in \mathbb{N}$: $\rho(P_{n+p}, P_n) < \varepsilon$

证明：先证充分性. 记 $P_n(x_n, y_n)$. $P_0(x_0, y_0)$.

$\because |x_{n+p} - x_n| \le \rho(P_{n+p}, P_n) < \varepsilon$. $|y_{n+p} - y_n| \le \rho(P_{n+p}, P_n) < \varepsilon$

$\therefore \{x_n\}, \{y_n\}$ 均收敛 记 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$ $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0$

再证必要性 记 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0$ $\therefore \forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ $\forall n > N$. $\rho(P_n, P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore \rho(P_{n+p}, P_n) \le \rho(P_{n+p}, P_0) + \rho(P_0, P_n) < \varepsilon$

闭域套定理. 设 D_n 是 $\mathbb{R}^2$ 中非空闭域列且满足 (1) $D_{n+1} \subset D_n$ (2) $d_n = d(D_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

则 $\exists!\, P_0 \in D_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$

证明：任取点列 $P_n \in D_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ $\forall p \in \mathbb{N}$. $P_{n+p} \in D_{n+p} \subset D_n$

$\therefore P_n \in D_n$ $P_{n+p} \in D_n$ $\therefore \rho(P_{n+p}, P_n) \le d(D_n) = d_n$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$. $\therefore \{P_n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_0$ (找 P_0)

下证对于给定 $n \in \mathbb{N}$. $P_0 \in D_n$.

$\forall p \in \mathbb{N}$. $P_{n+p} \in D_{n+p} \subset D_n$ $\because D_n$ 为闭域 $\therefore D_n$ 为闭集 $\therefore \lim\limits_{p\to+\infty} P_{n+p} = P_0 \in D_n$

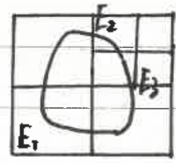
下证 P_0 唯一. 若 $\exists P_1$ s.t. $P_1 \in D_n$ 则 $\rho(P_1, P_0) \le \rho(P_1, P_n) + \rho(P_0, P_n) \le 2d_n \to 0\ (n\to+\infty)$

$\therefore \rho(P_0, P_1) = 0 \Rightarrow P_1 = P_0$.

推论：$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N > 0$. $\forall n > N$: $D_n \subset U(P_0, \varepsilon)$.

聚点定理：设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界无限点集. 则D在 $\mathbb{R}^2$ 中至少有一个聚点.

证明: ∵ D 为平面有界点集 ∴ ∃闭正方形 $E_1 \supset D$.



连接 E_1 对边中点,得其分成4个小闭正方形,其中必有一个闭正方形中含 D 中无穷个点. 记为 E_2.

再对 E_2 作上述过程得更小的闭正方形 E_3 含 D 中无穷个点.

一直下去可得闭正方形列 $\{E_n\}$: (1) $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots$ (2) E_n 中含 D 无穷个点.

(3) $n \to +\infty$ 时 E_n 面积趋于0.

∴ 由闭域套定理知, $\exists!\, P_0 \in E_n \ (n=1,2,\cdots)$.

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N > 0$. $\forall n > N$: $E_n \subset U(P_0, \varepsilon)$. ∵ E_n 含 D 中无穷个点, ∴ $U(P_0, \varepsilon)$ 含 D 中无穷个点

∴ P_0 为 D 聚点.

推论 有界无限点列 $\{P_n\} \subset \mathbb{R}^2$ 必有收敛子列 $\{P_{n_k}\}$.

有限覆盖定理: 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 中的有界闭域, $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 为一开域族, 它覆盖 D ($D \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \Delta_\alpha$), 则在 $\{\Delta_\alpha\}$ 中必存在有限个开域 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 它们覆盖有界闭域 D.

证明: 反证法. 假设不能用 $\{\Delta_\alpha\}$ 中有限个开域覆盖.

∵ $D \in \mathbb{R}^2$ 为有界闭域 ∴ ∃闭正方形 $E_1 \supset D$.

连接 E_1 对边中点,得其分成4个小闭正方形,其中必有一个闭正方形不能用 $\{\Delta_\alpha\}$ 中有限个开域覆盖, 记为 E_2.

再对 E_2 作上述过程得更小的闭正方形 E_3 不能用 $\{\Delta_\alpha\}$ 中有限个开域覆盖

一直下去可得闭正方形列 $\{E_n\}$: (1) $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots$ (2) E_n 不能用 $\{\Delta_\alpha\}$ 中有限个开域覆盖.

(3) $n \to +\infty$ 时 E_n 面积趋于0

∴ 由闭域套定理知 $\exists!\, P_0 \in E_n \ (n=1,2,\cdots)$.

∵ $\{\Delta_\alpha\}$ 为 D 的开覆盖 ∴ $\exists \Delta_\beta \in \{\Delta_\alpha\}$ s.t. $P_0 \in \Delta_\beta$. ∴ $\exists N > 0$. $\forall n > N$. $E_n \subset \Delta_\beta$.

∴ $\{\Delta_\alpha\}$ 中的一个开域 Δ_β 能覆盖 E_n, 矛盾.

∴ $\{\Delta_\alpha\}$ 中必存在有限个开域 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 覆盖有界闭域 D.

元连续函数.

函数的概念：$D\subseteq \mathbb{R}^n$ 若存在对应法则 f. $\forall P\in D$ 均有唯一实数 z 与之对应. 则称 f 为定义在 D 上的 n 元函数.

记作 $z=f(P)$ （点函数）

若 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 则上述 n 元函数可记为 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 其中 D 为 f 定义域.

$R_f=\{z\mid z=f(P),\ P\in D\}$ 为 f 值域.

(1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$

(2) $z=\ln(1-x^2-y^2)+\arccos\frac{y}{x}$. $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,\ |y|\le|x|$ 且 $x\ne 0\}$

(3) $u=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$, $D=\{(x,y,z)\mid 1<x^2+y^2+z^2\le 4\}$

函数的极限：设 $z=f(P)$ 是定义在 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的二元函数. P_0 为 D 聚点. 若 $\exists$ 常数 A. $\forall \varepsilon>0$. $\exists\delta>0$.

$\forall P\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$：$|f(P)-A|<\varepsilon$. 则称 A 为 $f(P)$ 在 D 上当 P 趋向于 P_0 时的极限.

定义域内

记作 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$

若 $z=f(P)=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限为 A. 记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

. 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+2y^2+2x-1)=9$.

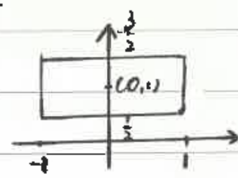
不妨设 $1<x<3$. $0<y<2$ （限制）则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{13}\}$.

$\forall |x-2|<\delta$. $|y-1|<\delta$. $(x,y)\ne(2,1)$ 有

构造目标结构

$|(x^2+2y^2+2x-1)-9|=|(x+4)(x-2)+2(y+1)(y-1)|\underset{\text{限制以放缩}}{\le} 7|x-2|+6|y-1|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+2y^2+2x-1)=9$.



. 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{x+2y-1}{x^2+y^2}=1$.

范围限定：$-1\le x\le 1$　$\frac{1}{2}\le y\le\frac{3}{2}$ （$(0,1)$ 某邻域）

$\therefore \forall\varepsilon>0$. ($\varepsilon<1$). $\exists\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{12},\frac{1}{2}\}$　$\forall|x-0|<\delta$. $|y-1|<\delta$. $(x,y)\ne(0,1)$ 有

$\left|\dfrac{x+2y-1}{x^2+y^2}-1\right|=\dfrac{|x^2-x+(y-1)^2|}{x^2+y^2}\le 4|x^2-x+(y-1)^2|\le \overset{\text{目标}}{4|x||x-1|+4(y-1)^2}\le 8|x|+4|y-1|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{x+2y-1}{x^2+y^2}=1$

. 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0$

法一. 夹逼　$\because 0\le\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le|x|$　又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$ $\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0$

法二. 极坐标　做极坐标变换有 $x=r\cos\theta$. $y=r\sin\theta$

$\therefore 0\le\dfrac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2}\le r$

另：$|xy|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. $\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}|y|$

元函数极限的归结原理：$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ (P\in D)}} f(P)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\forall E\subset D$. P_0 为 E 的聚点. $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ (P\in E)}} f(P)=A$

推论1 设 $E\subset D$，P_0 为 E 聚点，若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ (P\in E)}} f(P)$ 不存在，则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在.

推论2 设 $E_1, E_2\subset D$，P_0 为 E_1, E_2 聚点，若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ (P\in E_1)}} f(P)=A_1$，$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ (P\in E_2)}} f(P)=A_2$，当 $A_1\neq A_2$，则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在.

例1 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x+y}$

两种趋近试：① $y=kx\ (k\neq -1)$，$I=\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^3}{(1+k)x}=0$.

② $x+y=ky^n \Rightarrow x=ky^n-y$ $\quad I=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(ky^n-y)y^2 \to 3\text{阶}}{ky^n \to n\text{阶}} \xlongequal{\text{取}n=3} -\dfrac{1}{k}\neq 0$

(前提 $x+y$ 不得0)（特别地，取 $y=-x+x^3$，$I=1\neq 0$） ∴ 极限不存在.

例2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^{2022}}{x+y}$

令 $x+y=x^n\ (n>1)$，则 $y=-x+x^n$.

$\lim\limits_{\substack{y=-x+kx^n\\ x\to 0}} \dfrac{xy^{2022}}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(-x+kx^n)^{2022}}{kx^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2023}}{kx^n} \xlongequal[\text{取}n=2023]{(\text{分子分母同阶})} \dfrac{1}{k}\ (k\neq 0)$. ∴ 极限不存在

例3 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

① 沿 x 轴趋向原点：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=0$ ② 沿 $y=x$ 趋向原点：$\lim\limits_{\substack{y=x\\ x\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$ ∴ 不存在

（另：沿 $y=kx$ 趋向原点：$\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$）

注：可偏导未必连续（极限不存在） 与一元函数不同：极限趋近方向任意.

例4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^4}$

令 $x=ky^n$ ∴ $I=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{ky^{n+1}}{k^2y^{2n}+y^4 \to 4\text{阶}} \xlongequal{\text{取}n=3} k$ ∴ 极限不存在

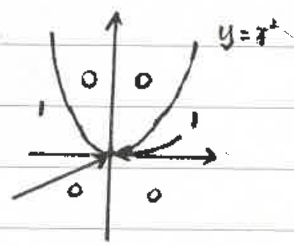
注：$\left|\dfrac{xy}{x^2+y^4}\right| \xlongequal{\text{极坐标}} \dfrac{r^2|\sin\theta\cos\theta|}{r^2(1+r^2\sin^4\theta)}=\dfrac{|\sin\theta\cos\theta|}{1+r^2\sin^4\theta}\leq|\sin\theta\cos\theta|$ 未必趋向0.

变式 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|x|+|y|}$

法一 $|xy|\leq\frac{1}{4}(|x|+|y|)^2$ ∴ $0\leq\dfrac{|xy|}{|x|+|y|}\leq\dfrac{1}{4}(|x|+|y|)$ 又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)=0$ ∴ $I=0$.

法二 极坐标. $0\leq\dfrac{|xy|}{|x|+|y|}=\dfrac{r^2|\cos\theta\sin\theta|}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}\leq r\to 0$ ∴ $I=0$

例5 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\ -\infty<x<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.



沿任何直线方向 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f(x,y)=0$.

沿 $y=kx^2\ (0<k<1)$ $\lim\limits_{\substack{y=kx^2\\ x\to 0}} f(x,y)=1$ ∴ 极限不存在

4 重极限与累次极限：重极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. 累次极限：$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

例1 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2+x-y}{x+y}$ 关于 $(0,0)$ 累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2+y^2+x-y}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}=1$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+y^2+x-y}{x+y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2-y}{y}=-1$

沿 $y=kx\ (k\neq -1)$ 趋向原点：$\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\dfrac{x^2+y^2+x-y}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+k^2)x^2+(1-k)x}{(1+k)x}=\dfrac{1-k}{1+k}$ 重极限不存在.

例2 $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$ 求原点处重极限与累次极限.

Page.

无穷小量·有界变量

累次极限：$\forall y\neq 0$，$x\to 0$ 时 $y\sin\frac{1}{x}$ 极限不存在，$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}=0$ $\therefore \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在

同理另一个累次极限也不存在

重极限：$|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}|\leq |x|+|y|$ $\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x})=0$

限与累次极限的关系：若 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处存在重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，则

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ （$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}$ 结论相同）

注：若 $f(x,y)$ 两累次极限存在但不相等，则重极限一定不存在

证明：假设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall (x,y)\in\mathring{U}(P,\delta)$：$|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

又累次极限存在 $\therefore \forall 0<|y-y_0|<\delta$ $\therefore$ 对极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\triangleq\varphi(y)$

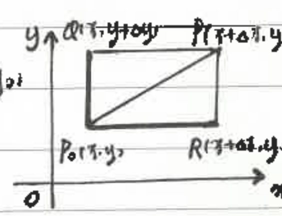
令 $x\to x_0$ $\therefore |\varphi(y)-A|\leq\varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A \Rightarrow \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$

元函数的连续

义：$z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有定义，$z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续

$\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall P(x,y)\in U(x_0,\delta)$：$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$



增量与偏增量：记 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$，称 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的全增量

称 $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 为关于 x 的偏增量

$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为关于 y 的偏增量

注：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta_x z=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta_y z=0$ 仅表示 $f(x,y)$ 沿 x 轴或 y 轴方向连续，

无法保证 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$ 即 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 未必连续

例：讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\cos xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 连续性.

$0\leq\frac{1-\cos xy}{x^2+y^2}=\frac{2\sin^2\frac{xy}{2}}{x^2+y^2}\leq\frac{(xy)^2}{2(x^2+y^2)}\leq\frac{1}{8}(x^2+y^2)$ $\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$ 连续

另：$1-\cos xy\sim\frac{1}{2}(xy)^2$ $\frac{(xy)^2}{2(x^2+y^2)}\leq\frac{r^4}{2r^2}=\frac{1}{2}r^2\to 0$

函数的连续性：设 $u=g(x,y)$，$v=h(x,y)$ 在 xy 平面 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有定义，并且在 P_0 连续，$f(u,v)$ 在

uv 平面 $Q_0(u_0,v_0)$ 某邻域内有定义，并且在 Q_0 连续，其中 $u_0=g(x_0,y_0)$，$v_0=h(x_0,y_0)$.

则 $z=f(g(x,y),h(x,y))\triangleq\varphi(x,y)$ 在 P_0 连续

证明：$\because f$ 在 Q_0 连续 $\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，$\forall |u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$：$|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon$

又 g,h 在 P_0 连续 $\therefore$ 对上述 $\eta>0$，$\exists\delta>0$，$\forall |x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$：

$$\begin{cases} |u-u_0| = |g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\eta \\ |v-v_0| = |h(x,y)-h(x_0,y_0)|<\eta \end{cases}$$

$\therefore \forall |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta$: $|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)| = |f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon$

$\therefore \varphi(x,y)=f(g(x,y),h(x,y))$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

有界闭区域上连续函数的性质：若 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续则

(1) 最值定理：$f(x,y)$ 在 D 上有界，且存在最大值和最小值. 即 $\exists(\xi_1,\eta_1)\in D$, $(\xi_2,\eta_2)\in D$ s.t.

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y)=f(\xi_1,\eta_1),\quad \min_{(x,y)\in D} f(x,y)=f(\xi_2,\eta_2).$$

证明：先证有界性. 假设 f 在 D 上无界，则 $\forall n\in N^+$, $\exists P_n\in D$ s.t. $|f(P_n)|>n$.

得到有界点列 $\{P_n\}\subset D$ 使 $\{P_n\}$ 有无穷多点，由聚点定理知，$\{P_n\}$ 中存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$.

设 $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k}=P_0\in D$.

又 f 在 D 上连续 $\therefore \lim\limits_{k\to\infty} f(P_{n_k})=f(P_0)$ 矛盾. $\therefore$ 有界

$\therefore f(x,y)$ 在 D 有界. 记 $M=\sup f(D)$, $m=\inf f(D)$.

若 $\forall Q\in D$: $f(Q)\neq M$ 则 $f(Q)<M$ 记 $F(P)=\dfrac{1}{M-f(P)}>0$.

$\therefore F(P)$ 在 D 连续 从而有上界

$\therefore \exists \alpha>0$, $\forall P\in D$: $0<F(P)\le\alpha \Rightarrow f(P)\le M-\dfrac{1}{\alpha}$ 与 $M=\sup f(D)$ 矛盾.

$\therefore f(P)$ 在 D 上存在最大值

(2) 零点存在定理：若 $\exists P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)\in D$ s.t. $f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)<0$. 则 $\exists(\xi,\eta)\in D$ s.t. $f(\xi,\eta)=0$ 且满足条件的 (ξ,η) 有无穷多个

证明：(1) 用闭区域 D 内的折线段连接 P_1,P_2 记 C: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$.

不妨设 P_1,P_2 对应参数为 α,β

$z=f(x(t),y(t))\triangleq g(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续且

$g(\alpha)g(\beta)=f(P_1)f(P_2)<0$. 由一元函数零点存在定理知，$\exists t_0\in(\alpha,\beta)$ s.t. $g(t_0)=0$

即 $f(\xi,\eta)=0$ 其中 $\xi=x(t_0)$, $\eta=y(t_0)$.

又连接 P_1,P_2 折线段有无穷多 $\therefore (\xi,\eta)$ 有无穷多个.

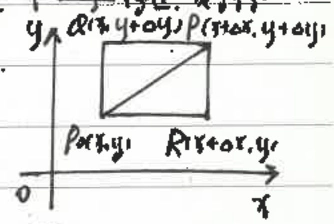
(3) 一致连续性：有界闭区域 D 上的连续函数 f 在 D 上一致连续

定义：$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall P,Q\in D$, $\rho(P,Q)<\delta$: $|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$.

偏导数与全微分

偏导数

定义：设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x,y)$ 在 P_0 处对 x 可偏导(偏导数存在)，此极限为 $f(x,y)$ 在 P_0 处对 x 的偏导数。

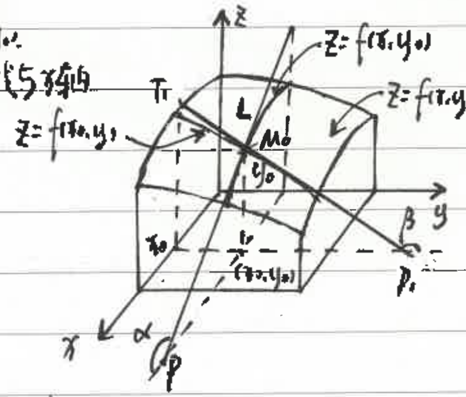


记作 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$，$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 或 $f'_x(P_0)$，$f'_x(x_0,y_0)$

即 $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

同理可得 $z=f(x,y)$ 关于 y 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$，$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$

几何意义：$f'_x(P_0)$ 表示 $C_1:\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切线与x轴正向夹角(的正切)，即 C_1 关于 x 轴的斜率



$C_1:\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$ 在 M_0 处切向量 $\vec{s_1}=(1,0,f'_x(M_0))$

$C_2:\begin{cases}z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}$ 在 M_0 处切向量 $\vec{s_2}=(0,1,f'_y(M_0))$

$\therefore$ $z=f(x,y)$ 在 M_0 处切平面法向量 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&f'_x\\0&1&f'_y\end{vmatrix}=(-f'_x,-f'_y,1)$

偏导函数：若 $z=f(x,y)$ 在 $D\subseteq R^2$ 的每一点都存在偏导数，则称 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 为 $z=f(x,y)$ 在 D 内偏导函数，简称偏导数。

注：对某个变量求偏导数，就是将其余变量看成常数，再对该变量求导

例1. $f(x,y)=(x-2)\arctan\sqrt{\frac{2y^2+1}{y^2+2}}+(y^2-3y+2)\sin\frac{\pi}{4}x$ 求 $f'_x(2,1)$，$f'_y(2,1)$.

法一. $f(x,1)=\frac{\pi}{4}(x-2)$ $\therefore f'_x(2,1)=\frac{\pi}{4}$

$f(2,y)=y^2-3y+2$ $\therefore f'_y(2,1)=-1$

法二. $f'_x(2,1)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x,1)-f(2,1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{\pi}{4}(x-2)}{x-2}=\frac{\pi}{4}$

$f'_y(2,1)=\lim\limits_{y\to 1}\frac{f(2,y)-f(2,1)}{y-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^2-3y+2}{y-1}=-1$

例2. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$ 同理 $f'_y(0,0)=0$.

注：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续，偏导存在与连续无关

$f(x,y)$ 在 P_0 对 x 可偏，$f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ 存在，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta_x z=0$ 仅说明 $z=f(x,y)$ 沿x轴方向连续.

例3. $z=(1+xy^2)^x$ $(x>0)$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 指化 $\frac{\partial}{\partial x}(e^{x\ln(1+xy^2)}) = e^{x\ln(1+xy^2)}[\ln(1+xy^2)+\frac{xy^2}{1+xy^2}] = (1+xy^2)^x[\ln(1+xy^2)+\frac{xy^2}{1+xy^2}]$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x(1+xy^2)^{x-1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(1+xy^2) = 2x^2y(1+xy^2)^{x-1}$

变式. $u=x^{y^z}$ $(x,y>0)$. 求 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

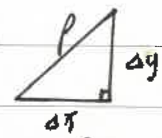
$x^{y^z}=x^{(y^z)}$ (否则 $(x^y)^z=x^{yz}$).

$\therefore \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z}\ln x\,\frac{\partial}{\partial z}(y^z) = x^{y^z}\ln x\cdot y^z\cdot\ln y$.

2. 全微分

定义: 设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有定义. 若∃常数A.B 对充分小的 Δx. Δy 均有

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, $\rho\to 0$. 其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.



则称 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x,y)$ 可微. 称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 P_0 处全微分 记作 $dz=A\Delta x+B\Delta y$

注: 全微分为全增量 Δz 的主要部分. 因其为 Δx. Δy 的线性函数. 又称线性主部.

多元函数连续、可偏导、可微的关系:

$$\begin{array}{ccc} \text{函数连续} & \longleftarrow\ \text{函数可微}\ \longrightarrow & \text{函数可偏导} \\ & \uparrow & \\ & \text{偏导数连续} & \end{array}$$

全微分存在的必要条件: 若 $z=f(x,y)$ 在P处可微, 则 $f(x,y)$ 在P处可偏导.

证明: ∵ $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 可微

∴ ∃A.B s.t. $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$.

$\Delta y=0$ 时. $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+o(\Delta x)$.

$\therefore f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=A$

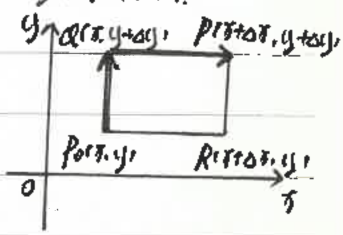
同理 $f'_y(x,y)=B$. ∴由此知若 $f(x,y)$ 在 P_0 处可微,则 $dz=f'_x(P_0)\Delta x+f'_y(P_0)\Delta y$

全微分存在的充分条件: 若 $z=f(x,y)$ 的偏导数 f'_x f'_y 在 $P(x,y)$ 处连续, 则 $z=f(x,y)$ 在P处可微.

证明: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$

$=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]$

Lagrange $f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$ (*)



∵若 $\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y)=A$ 则 $f(x,y)=A+o(1)$ (连续→极限)

$\therefore (*)=[\underbrace{f'_x(x,y)}_{\text{连续}}+\alpha]\Delta x+[\underbrace{f'_y(x,y)}_{\text{连续}}+\beta]\Delta y = f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+(\alpha\Delta x+\beta\Delta y)$

其中 $0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1$ 且 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\alpha=0$ $\lim\limits_{\Delta y\to0}\beta=0$

$\therefore \Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + (\alpha\Delta x+\beta\Delta y)$ (全增量公式)

记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ $\therefore 0\le\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right|\le|\alpha|\frac{|\Delta x|}{\rho}+|\beta|\cdot\frac{|\Delta y|}{\rho}\le|\alpha|+|\beta|\to0$

$\therefore \lim\limits_{\rho\to0}\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}=0$. $\therefore \alpha\Delta x+\beta\Delta y=o(\rho)$

$\therefore \Delta z = f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+o(\rho)$. 即 $z=f(x,y)$ 在P处的全微分

注. 对于n元函数 $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 若f在 $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 可微, 则 $du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$.

微分存在的充要条件: $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 可全微充要条件 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta z-[f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

即 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{}=0$.

注. 欲证 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 可全微. 代入

(1) $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处可偏导 (2) 上面极限为0

微分的计算: 若 $z=f(x,y)=x$. 则 $dz=dx=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\Delta x$ $\therefore dx=\Delta x,\ dy=\Delta y$

$\therefore dz = f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

例1. $z=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$ 求 dz, $dz|_{(1,2)}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{2}$

x,y地位相当: $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{5}$

$\therefore dz=\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$ $dz|_{(1,2)}=\frac{1}{2}dx+\frac{1}{5}dy$

例2. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 求 $du|_{(1,-2,2)}$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{1}{3}$. 同理 $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,-2,2)}=-\frac{2}{3}$ $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{3}$ $\therefore du|_{(1,-2,2)}=\frac{1}{3}(dx-2dy+2dz)$

例3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{|x|+|y|} & x^2+y^2\ne0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在(0,0)连续性 可微性 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$

$\because |xy|\le\frac{1}{4}(|x|+|y|)^2$ $\therefore 0\le\left|\frac{xy^2}{|x|+|y|}\right|\le\frac{1}{4}|y|(|x|+|y|)$

又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|y|\cdot(|x|+|y|)=0$ $\therefore\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ ∴连续

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 同理 $f'_y(0,0)=0$

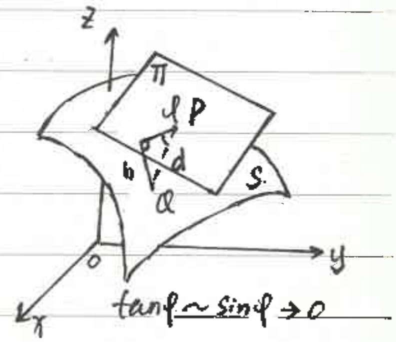
$\therefore\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta z-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta x(\Delta y)^2}{(|\Delta x|+|\Delta y|)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ $\Delta x=r\cos\theta$ $\Delta y=r\sin\theta$ 三角换元(极坐标).

$\lim\limits_{r\to0}\frac{r^3|\cos\theta\sin^2\theta|}{r^2(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}=\lim\limits_{r\to0}r\cdot\frac{|\cos\theta\sin^2\theta|}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}=0$. ∴可微

例4. 可全微但偏导不连续: $f(x,y)=\begin{cases}r^2\sin\frac{1}{r}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

构造思路：利用 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

可微的几何意义：可微性反映了曲面与其切平面之间的差距。



$\tan\varphi \sim \sin\varphi \to 0$

曲面 $S: z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 存在不平行于 z 轴的切平面 π 的充要条件是 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微。

证明：充分性：若 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则

$$\Delta z = z-z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho)$$

其中 $z_0=f(x_0,y_0)$，$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.　　$(\Delta z = dz+o(\rho))$.

设 $\pi: Z-z_0 = f'_x(x_0,y_0)(X-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(Y-y_0)$ 下证 π 为 S 在 P 处切平面

$$\forall Q(x,y,z)\in S,\quad h=\frac{|z-z_0-[f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)]|}{\sqrt{1+[f'_x(x_0,y_0)]^2+[f'_y(x_0,y_0)]^2}}=\frac{|o(\rho)|}{\sqrt{1+[f'_x(x_0,y_0)]^2+[f'_y(x_0,y_0)]^2}}$$

$$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=\sqrt{\rho^2+(z-z_0)^2}\geq\rho.$$

$\therefore 0\leq \frac{h}{d}\leq\frac{h}{\rho}\leq\frac{o(\rho)}{\rho}\to 0$　$(\rho\to 0+0)$　$\therefore \pi$ 为 S 在 P 处切平面.（必要性从略）

曲面的切平面与法线：若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $S: z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面为

$\pi: Z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ 切平面法向量为 $\pm(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)$.

过 P 与 π 垂直的直线称为法线 $L: \frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$

全微分 $dz=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ 表示曲面上增量 Δz，用切平面上的增量 dz 代替时相差高阶无穷小 $o(\rho)$.

例 求 $S: z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a,b>0)$ 上 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面方程.

$z'_x=\frac{2x_0}{a^2}$　$z'_y=\frac{2y_0}{b^2}$　$\therefore \pi: Z-z_0=\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0) \Leftrightarrow \frac{z+z_0}{2}=\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}$（替换法则）

多元复合函数的求导法则

多元复合函数：设 $z=f(u,v)$ 定义在 uv 平面的 D_{uv} 上，$u=g(x,y)$，$v=h(x,y)$ 定义在 xy 平面的 D_{xy} 上，且 $\{(u,v)\mid u=g(x,y),\ v=h(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}\}\subseteq D_{uv}$ 则称 $z=f(u,v)=f(g(x,y),h(x,y))$ $(x,y)\in D_{xy}$ 是以 f 为外函数，g,h 为内函数的复合函数。其中 x,y 为 f 自变量，u,v 为 f 中间变量

复合函数求导的链式法则：设 $u=g(x,y)$，$v=h(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 偏导数存在，$z=f(u,v)$ 在 (u,v) 可微，

则 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 均存在且 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$.

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

x y 树形路径

证明：$\Delta y=0$ 时 $\Delta_x u=g(x+\Delta x,y)-g(x,y)$，$\Delta_x v=h(x+\Delta x,y)-h(x,y)$.

$\because z=f(u,v)$ 可微，由全增量公式得 $\Delta_x z=f'_u(u,v)\Delta_x u+f'_v(u,v)\Delta_x v+(\alpha\Delta_x u+\beta\Delta_x v)$.

$\Delta_x u\to 0,\ \Delta_x v\to 0$ 时 $\alpha,\beta\to 0$.

$\because g,h$ 对 x 可偏 $\therefore$ $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta_x u\to 0,\ \Delta_x v\to 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'_u\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+f'_v\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\overset{\to 0}{\alpha}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\overset{\to 0}{\beta}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)$$

$$=f'_u g'_x+f'_v h'_x=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

同理，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$.

注：f 需可微才可成立，若 f 仅存偏导，未必成立

例1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 记 $g(t)=f(t,t)=\frac{t}{2}$.

$\therefore \frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}$ 　易知 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，但 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 不存在.

$\therefore f$ 在 $(0,0)$ 不可微，由链式法则求得 $\frac{dz}{dt}=0$ 错误.

例2. $z=(1+xy^2)^x\ (x>0)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

令 $u=1+xy^2$，$v=x$，则 $z=u^v\ (u>1)$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}y^2+u^v\ln u\overset{\text{代入}}{=}(1+xy^2)^x\left[\ln(1+xy^2)+\frac{xy^2}{1+xy^2}\right].$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}\cdot 2xy=2x^2y(1+xy^2)^{x-1}$

注：为书写方便，引入下列记号：在 $z=f(u,v)$ 中，记 $\frac{\partial f}{\partial u}=f'_1$，$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=f''_{12}$ (从左向右)

例3. 设 $z=f(x^2-y^2,\frac{y}{x})$ 且 f 具有二阶连续偏导，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. $f'_1(u,v)$

令 $u=x^2-y^2$，$v=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2xf'_1-\frac{y}{x^2}f'_2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\left(\frac{\partial f'_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f'_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{1}{x^2}f'_2-\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial f'_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f'_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= -4xyf''_{11} + \frac{2(x^2+y^2)}{x^2} f''_{12} - \frac{y}{x^3} f''_{22} - \frac{1}{x^2} f'_2$$

五.高阶偏导数：若 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 偏导数存在，则称 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 偏导数为 $f(x,y)$ 二阶偏导数，记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x,y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x,y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x,y)$$

其中 $f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 称为二阶混合偏导。

例. 设 $z = x^y \ (x>0)$ 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x^y(\ln x)^2$$

注：高阶偏导数与求导次序有关. 设
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

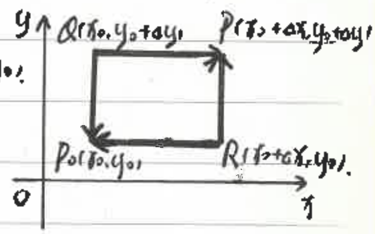
$(x,y) \neq (0,0)$ 时，
$$\begin{cases} f'_x(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \\ f'_y(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0. \qquad f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

$$\therefore f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \qquad \therefore f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$

混合偏导与求导次序无关的条件：设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 有二阶连续偏导，则 $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$



证明：记 $F(\Delta x,\Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0,y_0)$

$\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x,y_0)$，$\psi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0,y)$

$\therefore F(\Delta x,\Delta y) = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = \psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0)$

$\because f(x,y)$ 在 P_0 处存在二阶连续偏导 $\therefore \varphi(x)$ 在 x_0 某邻域二阶可导

由微分中值定理知 $F(\Delta x,\Delta y) = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x$

$$\overset{\text{代入}}{=} [f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x$$

$$= f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y \quad \theta_1,\theta_2 \in (0,1)$$

同理 $F(\Delta x,\Delta y) = \psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\Delta y$

$$= [f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y) - f'_y(x_0, y_0+\theta_3\Delta y)]\Delta y$$

$$= f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y \quad \theta_3,\theta_4 \in (0,1)$$

当 $\Delta x\Delta y \neq 0$ 时，由上式知 $f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)$

$\because f''_{xy}(x,y)$、$f''_{yx}(x,y)$ 在 $P_0(x,y)$ 连续

$\therefore \Delta x \to 0$、$\Delta y \to 0$ 时，左右两边极限存在且相等 $\therefore f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$

例1 设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 下，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

例2 设 $u=f(x,y,z)$，$y=g(x,t)$，$t=h(x,z)$ 都有一阶连续偏导，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$.

代入有 $u=f(x,g(x,h(x,z)),z)$.

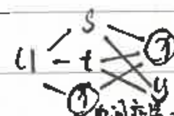
$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'(g_1'+g_2'h_1')=f_1'+f_2'g_1'+f_2'g_2'h_1'$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_2'g_2'h_2'+f_3'$$

变式 设 $u=f(x^2-y^2,xyz,x)$，f 一阶连续可导，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf_1'+yzf_2'+f_3'$$

注 若令 $s=x^2-y^2$，$t=xyz$.



① 自变量 x　$s.t$ 含有自变量 x，不含中间变量 x.

② 中间变量 x（对中间变量 x 求导时 $\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial x}=0$）.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}$$ ② 中间变量

易产生混淆，故使用 f_1'、f_2'、f_3' 记号.

例3 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 可微，满足 $yf_x'(x,y)=xf_y'(x,y)$，证明极坐标中 f 只是 r 的函数，即 $\frac{\partial f}{\partial \theta}=0$

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \therefore \frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta f_x'+r\cos\theta f_y'$$

$$=-yf_x'(x,y)+xf_y'(x,y)=0.$$

一阶微分的形式不变性 对于可微的 $z=f(u,v)$，$u=g(x,y)$，$v=h(x,y)$.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$\because z=f(u,v)$ 可微 $\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$（$u$、$v$ 为自变量）.

$\therefore u$、v 无论作为中间变量还是自变量，其全微分形式一样.

例1 设 $z=f(xy,e^{x-2y})$，且 f 有一阶连续偏导，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

设 $u=xy$，$v=e^{x-2y}$ $\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=f_1'(ydx+xdy)+f_2'(e^{x-2y}(dx-2dy))$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+e^{x-2y}f_2'.\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-2e^{x-2y}$$

例2 设 $u=f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数，即 $\forall t>0$：$f(tx+ty+tz)=t^nf(x,y,z)$，且 f 具有2阶

连续导数. 证明: $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=n(n-1)u.$ $f\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}t$

两边同时对 t 求导. 得 $xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx+ty+tz)=nt^{n-1}f(x,y,z).$

即 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(tx,ty,tz)=nt^{n-1}f(x,y,z).$

求导相当于作用一个算子.

两边再对 t 求导. 得 对整体求导(而非对偏求导).

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f(tx,ty,tz)=n(n-1)t^{n-2}f(x,y,z).$$

令 $t=1$. 有 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=n(n-1)u.$

变式. 证明: f 为 n 次齐次函数 $\Leftrightarrow xf_x'+yf_y'+zf_z'=nf$

先证必要性. $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$

两边同时对 t 求导 有 $xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)=nt^{n-1}f(x,y,z)$

令 $t=1$ $\therefore xf_1'+yf_2'+zf_3'=nf$

再证充要性. $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.\ xf_1'+yf_2'+zf_3'=nf$

要证 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$. 只需证 $\frac{f(tx,ty,tz)}{t^n}\triangleq g(t)=C.$

$$g'(t)=\frac{1}{t^{2n}}\left(t^n[xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)]-nt^{n-1}f(tx,ty,tz)\right)$$

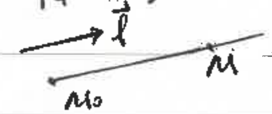
$$=\frac{1}{t^{n+1}}\left([\underset{\text{凹配}}{tx}f_1'(tx,ty,tz)+tyf_2'(tx,ty,tz)+tzf_3'(tx,ty,tz)]-nf(tx,ty,tz)\right)$$

$=0.$ $\therefore g(t)\equiv C\Rightarrow g(t)=g(1)=f(x,y,z)$ $\therefore f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$

5. 方向导数

定义. 设 $f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 某邻域 $U(M_0)\subseteq\mathbb{R}^3$ 内有定义. $\vec{l}$ 为某一确定方向. 以 M_0 为起点沿 $\vec{l}$ 方向(射线)任取点 $M(x,y,z)$. 且 $M\in U(M_0)$. 记 $\rho=|M_0M|$. 若 $\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$ 存在.
称此极限为 f 在 M_0 处沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数. 记作 $\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_{M_0}$. $f_{\vec{l}}'(M_0)$ 或 $f_{\vec{l}}'(x_0,y_0,z_0)$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_{M_0}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$$ (一元单侧极限).



注. (1) M 不是随意取的. 要求 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\vec{l}$ 同向

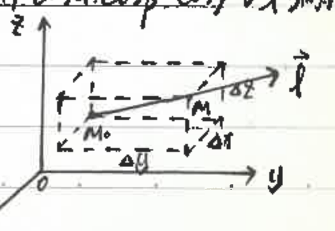
(2) $\frac{\partial f}{\partial\vec{i}}=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(x_0+\rho,y_0)-f(x_0,y_0)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{i})}=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(x_0-\rho,y_0)-f(x_0,y_0)}{\rho}=-\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(x_0-\rho,y_0)-f(x_0,y_0)}{-\rho}=-\frac{\partial f}{\partial x}$

方向导数的计算. 若 f 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微 (可微 $\Rightarrow$ 方向导数) 则 f 在 M_0 沿任何方向 $\vec{l}$ 的方向导数均存在.
且 $\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}=f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\cos\beta+f_z'(M_0)\cos\gamma$. 其中 $\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$ 为 $\vec{l}$ 方向余弦.

证明: 设 $M(x,y,z)$ 为以 M_0 为起点. 沿 $\vec{l}$ 的射线上任意一点.

$\therefore\begin{cases}x-x_0=\rho\cos\alpha=\Delta x\\y-y_0=\rho\cos\beta=\Delta y\\z-z_0=\rho\cos\gamma=\Delta z\end{cases}$ 其中 $\rho=|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$



$\because f$在M_0可微 $\therefore f(M)-f(M_0)=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+f'_z(M_0)\Delta z+o(\rho)$

$$\therefore \left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\left[f'_x(M_0)\frac{\Delta x}{\rho}+f'_y(M_0)\frac{\Delta y}{\rho}+f'_z(M_0)\frac{\Delta z}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}\right]$$

$$=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\cos\beta+f'_z(M_0)\cos\gamma$$

特别地，若$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$可微，则f在P_0沿$\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}=f'_x(P_0)\cos\alpha+f'_y(P_0)\cos\beta$

方向导数的计算步骤：(1)单位化：$\vec{l}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，$\vec{l}^0=\{\cos\varphi,\sin\varphi\}$

(2)求偏导 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$

(3)计算：$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$ ($z=f(x,y)$可微)

$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$ ($u=f(x,y,z)$可微)

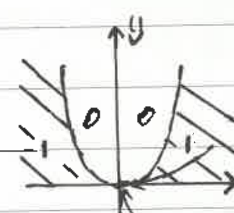
例1. $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 求f在$M(1,-2,2)$沿$\vec{l}=\{1,-2,2\}$方向导数

记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}$ $\therefore \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M=f'_x(M)=-\frac{1}{27}$

同理 $f'_y(M)=\frac{2}{27}$，$f'_z(M)=-\frac{2}{27}$ $\vec{l}^0=\{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\}$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l}=-\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{27}\cdot(-\frac{2}{3})+(-\frac{2}{27})\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}$.

例2. $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\ -\infty<x<+\infty\\ 0, & 其它\end{cases}$ 求$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}$ 其中$\vec{l}$为任意方向



$\because$始于原点的任意射线，都存在包含原点的充分小的一段，在此段上$f\equiv0$ $\therefore \left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=0$

可微 → 可偏、连续、方向导数

注：f在$(0,0)$极限不存在 $\therefore$不连续，不可微

此例可微是方向导数存在的充分不必要条件，函数连续同样是方向导数存在的既不充分也不必要条件

例3. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. (1)计算$f$在$O$处沿任何方向的方向导数 (2)证明$f$在$O$处偏导数不存在

(1)设$\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$(任意方向) $\therefore \frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\cos\beta,\rho\cos\gamma)-f(0,0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho-0}{\rho}=1$.

(2) $f'_x(0,0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ 不存在 同理 $f'_y(0,0,0)$，$f'_z(0,0,0)$也不存在

例4. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x+y}, & x+y\neq0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$ 计算f在O处沿$\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ($\alpha\neq\frac{3}{4}\pi$和$-\frac{\pi}{4}$)方向导数.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\cos\alpha\sin\alpha}{\rho^2(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

注：f在$(0,0)$不连续，不可微 $\therefore$不可使用方向导数计算公式

$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$. 同理$f'_y(0,0)=0$ $\therefore$利用公式得$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=0$. 错误

梯度：若$f(x,y,z)$在M处存在对所有变量的偏导数，称$(f'_x(M),f'_y(M),f'_z(M))$为$f$在$M$处的梯度

记作 $\mathrm{grad}\,f=\{f'_x(M),f'_y(M),f'_z(M)\}$

若$f(x,y,z)$在M处可微，则沿$\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$的方向导数为$\frac{\partial f}{\partial l}=f'_x(M)\cos\alpha+f'_y(M)\cos\beta+f'_z(M)\cos$

$= \{f_x'(M), f_y'(M), f_z'(M)\} \cdot \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} \triangleq \text{grad}\, f \cdot \vec{l}$.

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad}\, f \cdot \vec{l}^{\,0} = |\text{grad}\, f| \cos\varphi$. 其中 φ 为 grad f 与 $\vec{l}$ 夹角

$\therefore \left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{max} = |\text{grad}\, f|$. $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{min} = -|\text{grad}\, f|$.

例1. 求 $u = x^3 - 3x^2y + 3y^2z - z^3$ 在 $M(1,-1,2)$ 处梯度和最大方向导数.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2 + 6yz$ $\frac{\partial u}{\partial z} = 3y^2 - 3z^2$

$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 9$ $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -15$ $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -9$ $\therefore \text{grad}\, u|_M = 9\vec{i} - 15\vec{j} - 9\vec{k}$

$(\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M)_{max} = |\text{grad}\, u|_M| = 3\sqrt{43}$.

例2. 求 $E = G\frac{mM}{r}$ 的梯度 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}|$.

$\frac{\partial E}{\partial x} = -G\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$ $\frac{\partial E}{\partial y} = -G\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{y}{r}$ $\frac{\partial E}{\partial z} = -G\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{z}{r}$

$\therefore \text{grad}\, E = \frac{\partial E}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E}{\partial z}\vec{k} = G\frac{mM}{r^2}(-\frac{x}{r}\vec{i} - \frac{y}{r}\vec{j} - \frac{z}{r}\vec{k}) = G\frac{mM}{r^2}(-\vec{r}^{\,0})$.

例3. 设 $u = x^2 - 2y^2 + z^2 + 2x$ 求 u 在 $M_0(1,2,3)$ 处最大方向导数

$\text{grad}\, u = u_x'\vec{i} + u_y'\vec{j} + u_z'\vec{k} = (2x+2)\vec{i} + (-4y)\vec{j} + (2z)\vec{k} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k}$

$\therefore |\text{grad}\, u| = 2\sqrt{29}$.

注: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \text{grad}\, u \cdot d\vec{s}$ 切向量 $d\vec{s} = \{dx, dy, dz\}$.

例4. 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$ 讨论 f 在 O 处沿 $\vec{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ 方向导数.

$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim\limits_{\rho\to 0^+} \frac{f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) - f(0,0)}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{\rho^3} = \cos^2\alpha\sin\alpha$

注. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续但不可微 ($f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$. $f_y'(0,0) = 0$.

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - [f_x'(0,0)\Delta x + f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho} = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 不存在. ($\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$).

$\therefore$ 利用方向导数公式 求得 $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$ 错误.

例5. 设 $z = z(x,y)$ 具有二阶连续偏导. 若 $x = e^u\cos\theta$. $y = e^u\sin\theta$. 求证 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = e^{2u}(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = e^u(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y})$

$z \begin{array}{l} x - u \\ y \times \theta \end{array}$

$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = e^u(-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y})$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}) + e^u[\cos\theta(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}e^u\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}e^u\sin\theta)$

$+ \sin\theta(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}e^u\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}e^u\sin\theta)]$

$= e^u(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}) + e^{2u}(\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = e^u(-\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} - \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}) + e^{2u}(\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = e^{2u}(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$.

Page.

例6 设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导 试确定 a,b 的值 使得 利用变换 $\begin{cases} u=ax+3y \\ v=x+by \end{cases}$ 可将

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\triangleq \underline{\left(a\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)}z$ 相当于作用微分算子.

$\frac{\partial z}{\partial y}=3\frac{\partial z}{\partial u}+b\frac{\partial z}{\partial v}\triangleq\left(3\frac{\partial}{\partial u}+b\frac{\partial}{\partial v}\right)z$.

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(a\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(3\frac{\partial}{\partial u}+b\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z=9\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+6b\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(3\frac{\partial}{\partial u}+b\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)z=3a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(ab+3)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(a^2-12a+27)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+[2a-4(ab+3)+18b]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(3b^2-4b+1)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$

$\therefore \begin{cases} a^2-12a+27=0 \\ 3b^2-4b+1=0 \\ 2a-4(ab+3)+18b\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases}$

对x积分,会不能写为0.

注. 设 $z=z(x,y)$. $\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow z=\int\frac{\partial z}{\partial x}dx+g(y)=g(y)$ (不能写成0. 但表示与x无关)

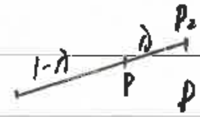
$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\int\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+g(y)=g(y)$ 对y的常数等价关于x的函数.

$z=\int g(y)\,dy+h(x)=G(y)+h(x)$ (不能写成C. 对y积分,仅表示与y无关)

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ 时 z可写作关于x、关于y的函数之和的形式 便于偏微分方程求解.

§3 中值定理和Taylor公式

1. 二元函数中值定理



凸域：若区域 D 内任意两点连线都属于 D，则称 D 为凸域。　$P=\lambda P_1+(1-\lambda)P_2\ (0\le\lambda\le1)$

D 为凸域 $\Leftrightarrow \forall P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2)\in D,\ \forall\lambda\in[0,1]:\ P(x_1+\lambda(x_2-x_1),\ y_1+\lambda(y_2-y_1))\in D.$

定理：设 f 在凸开域 D 上连续，在 D 所有内点处可微，则 $\forall P(a,b),\ Q(a+h,b+k)\in D,\ \exists\theta\in(0,1)$，

s.t. $f(a+h,b+k)-f(a,b)=f'_x(\underline{a+\theta h},\ b+\theta k)\underline{h}+f'_y(\underline{a+\theta h},\ \underline{b+\theta k})\underline{k}.$

证明：令 $\varphi(t)=f(a+th,\ b+tk)$（降元），则 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导

且 $\varphi'(t)=hf'_x(a+th,\ b+tk)+kf'_y(a+th,\ b+tk).$

由Lagrange中值定理知 $\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)=f'_x(a+\theta h,\ b+\theta k)h+f'_y(a+\theta h,\ b+\theta k)k.$

又 D 是凸域 $\therefore(a+\theta h,\ b+\theta k)\in D.$

注：中值定理与全增量公式区别：$\Delta z=f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x,\ y+\theta_2\Delta y)\Delta y$ 中 θ_1 未必与 θ_2 相等，

而中值定理通过构造一元函数得到，仅产生一个 θ.

2. 二元函数的Taylor展开

设 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 某邻域 $U(P)$ 内有 $(n+1)$ 阶连续偏导数，则 $\forall(x,y)\in U(P)$

记 $\Delta x=x-x_0,\ \Delta y=y-y_0$，$\exists\theta\in(0,1)$ s.t.

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y).$$

其中 $\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^kf(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^kf}{\partial x^i\partial y^{k-i}}(\Delta x)^i(\Delta y)^{k-i}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\ (k=1,2,3,\cdots).$

证明：构造 $\varphi(t)=f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)$ （$\varphi(t)=f(x,y)$，$x=x_0+t\Delta x$，$y=y_0+t\Delta y$，$f<\begin{smallmatrix}x-t\\y-t\end{smallmatrix}$）.

$\because z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 某邻域 $U(P)$ 内具有 $n+1$ 阶连续偏导数，则 $\varphi(t)$ $\forall t\in[0,1]$ 有 $(n+1)$ 阶连续导数

由Taylor公式得 $\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1},\ 0<\theta<1$

变量x的取值

又 $\varphi'(t)=\Delta xf'_x(\underline{x_0+t\Delta x},\ y_0+t\Delta y)+\Delta yf'_y(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)$

相当于作用的偏导数

$$=\underline{\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)}f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y).$$

变量x

$$\therefore\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$
$$=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^kf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)$$

皮亚诺余项形式：对 $z=f(x,y)$，若在 $U(P)$ 内存在 n 阶连续偏导数，则 $f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^kf(x_0,y_0)+o(\rho^n)$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

例：求 $f(x,y)=x^2y$ 在 $P(1,-2)$ 处二阶Taylor展开式.

法一 $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=2$

$\therefore P(1,-2)$处 $\frac{\partial f}{\partial x}=-4\quad \frac{\partial f}{\partial y}=1\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

$f(x,y)=f(1,-2)+[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+2)\frac{\partial}{\partial y}]f(1,-2)+\frac{1}{2!}[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+2)\frac{\partial}{\partial y}]^2 f(1,-2)+R_2$

$=-2+[-4(x-1)+(y+2)]+\frac{1}{2}[-4(x-1)^2+4(x-1)(y+2)]+R_2$

其中 $R_2=\frac{1}{3!}[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+2)\frac{\partial}{\partial y}]^3 f(1+\theta(x-1),-2+\theta(y+2))$

$=\frac{1}{3!}C_3^2(x-1)^2(y+2)\cdot 2=(x-1)^2(y+2).\quad \theta\in(0,1)$

法二 多项式 $\xrightarrow{Taylor}$ 多项式　换元，换为关于 $(x-1,y+2)$ 多项式。

令 $x-1=u,\ y+2=v\quad \therefore f(x,y)=(u+1)^2(v-2)=-2+(-4u+v)+(-2u^2+2uv)+u^2v$

$=-2+[-4(x-1)+(y+2)]+\frac{1}{2}[-4(x-1)^2+4(x-1)(y+2)]+(x-1)^2(y+2).$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}$ → ρ^2 展开二阶

法一 Taylor 记 $f(x,y)=\ln(x^2+e^{y^2})\quad f'_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+e^{y^2}}\quad f'_y(x,y)=\frac{2ye^{y^2}}{x^2+e^{y^2}}$

$f''_{xx}(x,y)=\frac{2e^{y^2}-2x^2}{(x^2+e^{y^2})^2}\quad f''_{xy}(x,y)=\frac{-4xye^{y^2}}{(x^2+e^{y^2})^2}$

$f''_{yy}(x,y)=\frac{(2+4y^2)e^{y^2}(x^2+e^{y^2})-4y^2e^{y^2}}{(x^2+e^{y^2})^2}$

$\therefore f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0\quad f''_{xx}(0,0)=f''_{yy}(0,0)=2.\quad f''_{xy}(0,0)=0.$

$\therefore f(x,y)=f(0,0)+[xf'_x(0,0)+yf'_y(0,0)]+\frac{1}{2}(x^2f''_{xx}(0,0)+2xyf''_{xy}(0,0)+y^2f''_{yy}(0,0))+o(\rho^2)$

$=(x^2+y^2)+o(\rho^2).\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}\quad \therefore I=1$

法二 无穷小量等价替换　$(x,y)\to(0,0)$时 $\ln(x^2+e^{y^2})=\ln(1+(x^2+e^{y^2}-1))\sim x^2+e^{y^2}-1$

$\therefore I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+e^{y^2}-1}{x^2+y^2}=1+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{y^2}-1-y^2}{x^2+y^2}$

又 $0\le\frac{|e^{y^2}-1-y^2|}{x^2+y^2}\le\frac{|e^{y^2}-1-y^2|}{y^2}\to 0\quad \therefore I=1$

微分、Taylor展开与切平面间的联系：设 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处存在一阶连续偏导，则

全增量公式(一阶Taylor展开) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+\alpha\rho$

全微分 $\Delta z=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho)$

切平面方程 $z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

§6 无条件极值

1. 二元函数的极值

定义：设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，若 $\forall (x,y)\in U(P_0)$：$f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$，则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 极大(小)值，点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的极大(小)值点.

极值存在的必要条件：设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有偏导，若 P_0 是 $f(x,y)$ 极值点，则 $\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \Leftrightarrow dz|_{P_0}=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \Leftrightarrow \mathrm{grad} f=0 \end{cases}$

极值点处一阶偏导数为0或梯度为0. 这种点称为稳定点(驻点)

证明：若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 取极大值，则 $z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 也取极大值

由Fermat定理知 $\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)=0.$

同理 $z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取极大值 $\therefore f'_y(x_0,y_0)=0.$

极值存在的充分条件：设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有连续二阶偏导数，定义矩阵 $Hf(P_0)=\begin{pmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{pmatrix}_{P_0}$ 称为 f 在 P_0 处的海塞(Hesse)矩阵.

设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有连续二阶偏导数，且 $P_0(x_0,y_0)$ 是 f 稳定点，则

(1) 当Hesse矩阵 $Hf(P_0)$ 是正定矩阵时，$f(x,y)$ 在 P_0 处取极小值

(2) 当Hesse矩阵 $Hf(P_0)$ 是负定矩阵时，$f(x,y)$ 在 P_0 处取极大值

(3) 当Hesse矩阵 $Hf(P_0)$ 是不定矩阵时，$f(x,y)$ 在 P_0 处没有极值

(4) 当Hesse矩阵 $Hf(P_0)$ 是半正(负)定矩阵时，$f(x,y)$ 在 P_0 处可能有极值，可能没有极值.

正定矩阵判定：(1) $\forall x$: $x^TAx>0$ (定义)

(2) 各阶顺序主子式 $\Delta_k>0$.

(3) 所有特征值 $\lambda_i>0$.

(4) 正惯性指数 $p=n$

(5) 与单位阵合同，即 $\exists$ 可逆矩阵 C s.t. $A=C^TC$.

证明：$f'_x(P_0)=f'_y(P_0)=0$ 将 f 在 P_0 处作二阶Taylor展开有

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(\Delta x,\Delta y)\,Hf(P_0)\,(\Delta x,\Delta y)^T+o((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$$

$\because Hf(P_0)$ 正定 $\therefore \forall(\Delta x,\Delta y)\ne(0,0)$ $Q(\Delta x,\Delta y)\triangleq(\Delta x,\Delta y)Hf(P_0)(\Delta x,\Delta y)^T>0$

$\therefore \exists$ 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数 $q>0$ s.t. $Q(\Delta x,\Delta y)\ge 2q((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$. (本说明 $Q(\Delta x,\Delta y)$ 的正号)

$\therefore$ 对充分小的 $U(P_0)$，$\forall(x,y)\in U(P_0)$：$f(x,y)-f(x_0,y_0)=((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)(q+o(1))\ge 0.$

$\therefore f$ 在 P_0 取极小值.

极值存在的充分条件(非矩阵表述)：设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 有连续二阶偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$. 记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0$

$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

(1) 若 $B^2-AC<0$ 则 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 极值点 且

当 $A>0$ 时 $f(x,y)$ 在 P_0 取极小值

当 $A<0$ 时 $f(x,y)$ 在 P_0 取极大值

(2) 若 $B^2-AC>0$ 则 $P_0(x_0,y_0)$ 不是 $f(x,y)$ 极值点

(3) 若 $B^2-AC=0$ 则 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可能有极值, 可能没有极值

证明: $f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)+\frac{1}{2}[f''_{xx}(P_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(P_0)(x-x_0)(y-y_0)$
$+f''_{yy}(P_0)(y-y_0)^2]+o(\rho^2)$

令 $x-x_0=u$. $y-y_0=v$ ∴ $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[Au^2+2Buv+Cv^2]$

∴ 正定 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Delta_1=A>0\\ \Delta_2=AC-B^2>0\end{cases}$ (二次函数 $(2B)^2-4AC<0$)

二元函数求极值的基本步骤: (1) 求驻点 $\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=0\\ f'_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$ (2) $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

(3) 判断 $\Delta=B^2-AC$ $\begin{cases}>0 & \text{无极值}\\ <0 & \text{有极值}\begin{cases}A>0 & \text{极小值}\\ A<0 & \text{极大值}\end{cases}\\ =0 & \text{无法判断}\end{cases}$

例1. 求 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 极值.

显然 f 在 $\mathbb{R}^2$ 任意点处存在偏导数. 令 $\begin{cases}f'_x(x,y)=4x^3-2x-2y=0\\ f'_y(x,y)=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ 驻点 $P_1(-1,-1)$ $P_2(0,0)$ $P_3(1,1)$

$f''_{xx}=12x^2-2$, $f''_{xy}=-2$, $f''_{yy}=12y^2-2$

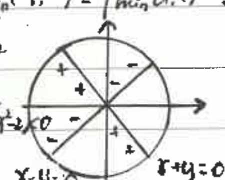
	A	B	C	B^2-AC
(-1,-1)	10	-2	10	-96 定
(0,0)	-2	-2	-2	0
(1,1)	10	-2	10	-96

∴ $f(x,y)$ 在 P_1, P_3 处有极小值 $f_{min}(-1,-1)=f_{min}(1,1)=-2$

在P_2处取邻域 $U(P_2)$, $f=x^4+y^4-(x+y)^2$

取 $P(x,x)\in U(P_2)$, $\forall 0<|x|<\delta$: $f(P)=2x^4-4x^2<0$

取 $P(x,-x)\in U(P_2)$, $\forall x\neq 0$ $f(P)=2x^4>0$.



∴ $f(0,0)$ 不是 f 的极值

例2. 求 $P(x,y)$ s.t. P 到 $x+2y-4=0$, x轴, y轴距离平方和最小.

记P到 $x+2y-4=0$, x轴, y轴距离平方和为 $f(x,y)$. ∴ $f(x,y)=\frac{1}{5}(x+2y-4)^2+x^2+y^2$

令 $\begin{cases}f'_x(x,y)=\frac{2}{5}(x+2y-4)+2x=0\\ f'_y(x,y)=\frac{4}{5}(x+2y-4)+2y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ 驻点 $P(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$ 又 $A=f''_{xx}=\frac{12}{5}$. $B=f''_{xy}=\frac{4}{5}$. $C=f''_{yy}=\frac{18}{5}$

∴ $B^2-AC<0$, $A>0$. $H_f(P)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}12&4\\4&18\end{pmatrix}$ 正定, 取极小值

∴ $P(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$ 到 $x+2y-4=0$, x,y轴距离平方和最小.

No.

Date

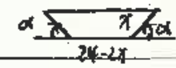
例3. 讨论 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ 在O是否有极值.

当 $y>2x^2$ 时 $f(x,y)>0=f(0,0)$. 当 $x^2<y<2x^2$ 时 $f(x,y)<0=f(0,0)$ ∴无极值

注. $f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2=0$ 无法判断是否取极值.

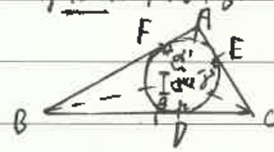
例4. 一块宽24cm的矩形铁皮,两边折起成梯形槽,当x,α取何值时截面积最大?

$S(x,\alpha)=\frac{1}{2}(24-2x+24-2x+2x\cos\alpha)x\sin\alpha=(24-2x+x\cos\alpha)x\sin\alpha$



令 $\begin{cases} S'_x=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=0 \\ S'_\alpha=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2\cos2\alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ \alpha=\frac{\pi}{3} \end{cases}$ $(0<x<12,\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2})$. ∴有唯一驻点 $(8,\frac{\pi}{3})$.

∴ $(x,\alpha)=(8,\frac{\pi}{3})$ 时 $S_{max}=48\sqrt{3}\,cm^2$



例5. 证明:在○的所有外切△中,正△的面积最小.

设△ABC为○I外切△. ○I与边BC,CA,AB分别切于D.E.F 记∠EIF=2α,∠FID=2β ∠DIE=2γ

则 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

法一. $S_{\triangle ABC}=r^2(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)=r^2(\tan\alpha+\tan\beta-\tan(\alpha+\beta))$

令 $\begin{cases} S'_\alpha=r^2(\sec^2\alpha-\sec^2(\alpha+\beta))=0 \\ S'_\beta=r^2(\sec^2\beta-\sec^2(\alpha+\beta))=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$

此时 $S''_{\alpha\alpha}=4\sqrt{3}r^2>0$ $S''_{\alpha\beta}=2\sqrt{3}r^2$ $S''_{\beta\beta}=4\sqrt{3}r^2$ 且 $\Delta=-36r^4<0$

∴ $\alpha,\beta=\frac{\pi}{3}$ 时取最小值 此时△ABC为正△.

法二. 三角恒等式 $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$

∴ $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma \overset{基本不等式}{\geq} 3\sqrt[3]{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}$

∴ $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\geq3\sqrt{3}$. ∴ $S\geq3\sqrt{3}r^2$

No.

Date

§4 隐函数

1. 隐函数

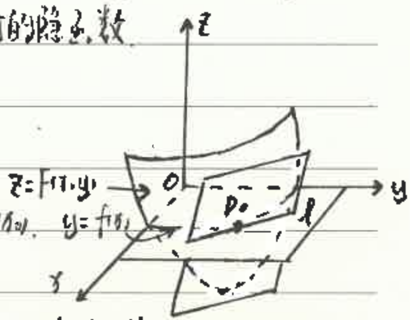
概念：设 $E\subseteq\mathbb{R}^2$，$F:E\to\mathbb{R}$，对于 $F(x,y)=0$，若 $\exists\, I,J\subset\mathbb{R}^2$，$\forall x\in I$，$\exists!\, y\in J$ s.t. $(x,y)\in E$

且 $F(x,y)=0$，则称 $F(x,y)=0$ 确定了一个定义域为 I，值域含于 J 的隐函数。

若将此隐函数记作 $y=f(x)$，则 $\forall x\in I$：$F(x,f(x))\equiv 0$

由 $F(x,y)=0$ 确定的 $y=f(x)$ 可看作 $z=F(x,y)$ 与 $z=0$ 交线。

若隐函数存在，则交集非空，$\exists P_0(x_0,y_0)$ s.t. $F(x_0,y_0)=0$ 或 $y_0=f(x_0)$。



注 (1) 若确定一个连续函数，则交集是一条通过 P_0 的连续曲线段

(2) 若 S 在 P_0 处有切平面，且切平面与 $z=0$ 交于 l，则 S 在 P_0 处与 $z=0$ 相交，交线在 P_0 处切线为 l

∴ 要求 F 在 P_0 可微 且 $(F_x'(P_0),F_y'(P_0))\neq(0,0)$

(初始条件：交集非空)

2. 隐函数存在性定理

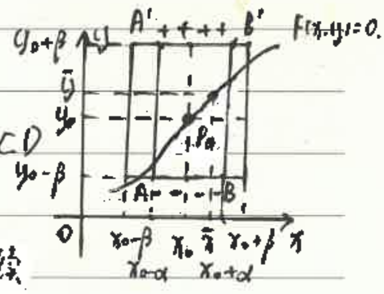
若 $F(x,y)$ 满足 (1) F 在以 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某一区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 内连续 (2) $F(x_0,y_0)=0$

(3) 在 D 内存在连续的偏导数 $F_y(x,y)$ (4) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ ($F(x,y)$ 关于 y 严格单调) —— 一一对应

则 (1) $\exists P_0$ 某邻域 $U(P_0)\subset D$，在 $U(P_0)$ 内 $F(x,y)$ 唯一确定一个定义在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内的

[存在性] 隐函数 $y=f(x)$ s.t. $\forall x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$，$(x,f(x))\in U(P_0)$ 且 $F(x,f(x))\equiv 0$，$f(x_0)=y_0$

[连续性] (2) $f(x)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 连续。



证明：由(4)，不妨设 $F_y(x_0,y_0)>0$。

∵ F_y 在 $U(P_0)$ 连续 ∴ $\exists P_0$ 某邻域 $[x_0-\beta,x_0+\beta]\times[y_0-\beta,y_0+\beta]\subset D$

保号$_y$ s.t. F_y 在其上每点处均有 $F_y(x,y)>0$ (保号性)

↓

单调$_y$ ∴ $\forall x\in[x_0-\beta,x_0+\beta]$，$F(x,y)$ 关于 y 在 $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ ↑ 且连续

↓

零点$_y$ 由 $F(x_0,y_0)=0$ 得 $F(x_0,y_0-\beta)<0$，$F(x_0,y_0+\beta)>0$。

↓

保号$_x$ ∵ F 连续 ∴ $F(x,y_0-\beta)$，$F(x,y_0+\beta)$ 关于 x 在 $[x_0-\beta,x_0+\beta]$ 连续。

↓

∴ $\exists\alpha>0\ (\alpha\le\beta)$ $\forall x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$：$F(x,y_0-\beta)<0$，$F(x,y_0+\beta)>0$

零点$_y$

↓

∴ $\forall \bar x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$：$F(\bar x,y_0-\beta)<0$，$F(\bar x,y_0+\beta)>0$。

$F(x,y)=0$

由零点存在性定理知 $\exists!\,\bar y\in(y_0-\beta,y_0+\beta)$ s.t. $F(\bar x,\bar y)=0$。

f

由 x 任意性得 $\exists!\, y=f(x)$ 定义域 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$，值域 $\subset(y_0-\beta,y_0+\beta)$ 且 $F(x,f(x))\equiv 0$

No.

Date . .

记 $U(P_0)=(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\beta,y_0+\beta)$ 则 $y=f(x)$ 满足(1).

下证连续性. $\forall \bar{x}\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$. 记 $\bar{y}=f(\bar{x})\in(y_0-\beta,y_0+\beta)$.

单调$_y$ ↓ 零点$_y$ ↓ 保号$_x$ ↓ 零点$_y$ ↓ $F(x,y)=0$ ↓ f

$\therefore \forall\varepsilon>0\ (\varepsilon<\beta)$: $\bar y-\beta<\bar y-\varepsilon<\bar y<\bar y+\varepsilon<\bar y+\beta$

$\because F(\bar x,\bar y)=0$. F关于y严格单调 $\therefore F(\bar x,\bar y-\varepsilon)<0$. $F(\bar x,\bar y+\varepsilon)>0$

$\therefore \exists\delta>0$. $\forall x\in(\bar x-\delta,\bar x+\delta)\subset(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$: $F(x,\bar y-\varepsilon)<0$. $F(x,\bar y+\varepsilon)>0$ (保号性)

$\therefore$ 由零点存在性定理知. $\exists!\, y\in(\bar y-\varepsilon,\bar y+\varepsilon)$ s.t. $F(x,y)=0$ 即 $y=f(x)$, $|y-\bar y|<\varepsilon$.

$\therefore \forall\varepsilon>0.\ \exists\delta>0.\ \forall x\in(\bar x-\delta,\bar x+\delta)$: $|f(x)-f(\bar x)|<\varepsilon$

$\therefore f(x)$在$\bar x$处连续. 由$\bar x$任意性知 $f(x)$在$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$连续.

3. 隐函数可微性定理: 设$F(x,y)$满足隐函数存在性定理条件, 又在D上存在连续偏导数$F'_x(x,y)$, 则由 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数$y=f(x)$在其定义域$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$内有连续导数, 且 $f'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

证明: 设$x,\ x+\Delta x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$. 对应 $y=f(x)$. $y+\Delta y=f(x+\Delta x)\in(y_0-\beta,y_0+\beta)$.

且 $F(x,y)=F(x+\Delta x,y+\Delta y)=0$.

$\theta\in(0,1)$

由二元函数中值定理知 $0=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)=F'_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta x+F'_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta y$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{F'_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta x)}{F'_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

$\therefore f'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ 连续 且 $f'(x)$在$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$连续.

注: $F(x,y)=0\Rightarrow F'_1+F'_2\dfrac{dy}{dx}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_1}{F'_2}$

4. 三元函数隐函数存在性定理: 若$F(x,y,z)$满足(1) F在以$M_0(x_0,y_0,z_0)$为内点的某一区域$V\subseteq\mathbb{R}^3$上连续

(1) $F(x_0,y_0,z_0)=0$ (初始条件) (2) 在V内∃连续偏导数$F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$.
(保证隐函数可偏, 仅存在性可不要求)

(3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq0$

则在M_0某邻域$U(M_0)$内∃!具有连续偏导数函数$z=f(x,y)$ 且满足 $z_0=f(x_0,y_0)$, $F(x,y,f(x,y))=0$

并且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

$z\begin{cases}x\\y\end{cases}$

注: $F(x,y,z)=0\Rightarrow\begin{cases}F'_x(x,y,z)+F'_z(x,y,z)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ F'_y(x,y,z)+F'_z(x,y,z)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ $\because F'_z\neq0$ $\therefore\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\end{cases}$ (∂x, ∂y, ∂… 单独元…)

不能记忆该公式 (仅适用于$F(x,y,z)$标准情况 [x,y,z相互无关 / 但非限制], 如$F(x+y+2z,x^2-y^2,xyz)=0$不能直接使用).

例1. $F(u,v,w)$均有一阶连续偏导, 且$F(x+2y+2z,x^2-y^2,xyz)=0$. 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

法一. 两边同时对x求偏导得 $F_1'(1+2\frac{\partial z}{\partial x})+F_2'\cdot 2x+F_3'(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x})=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'+2xF_2'+yzF_3'}{2F_1'+xyF_3'}$

法二. 公式法. 令 $G(x,y,z)=F(x+y+2z,x^2-y^2,xyz)=0$ 化标准型. 此时x,y,z无关.

$\therefore G_x'=F_1'+2xF_2'+yzF_3'$. $G_z'=2F_1'+xyF_3'$ $\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x'}{G_z'}=-\frac{F_1'+2xF_2'+yzF_3'}{2F_1'+xyF_3'}$

法三. 一阶微分形式不变性. 两边求微分得 $F_1'(dx+dy+2dz)+F_2'(2xdx-2ydy)+F_3'(yzdx+zxdy+xydz)=0$

$\therefore dz=-\frac{F_1'+2xF_2'+yzF_3'}{2F_1'+xyF_3'}dx-\frac{F_1'-2yF_2'+zyF_3'}{2F_1'+xyF_3'}dy=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'+2xF_2'+yzF_3'}{2F_1'+xyF_3'}$

例2. 设$z=z(x,y)$是$x(y^2+z)+e^z=1$确定的隐函数. 求$\frac{\partial z}{\partial x}$. $\frac{\partial z}{\partial y}$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

方程两边对x,y求偏导:

$$\begin{cases} y^2+z+x\frac{\partial z}{\partial x}+e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad (*) \\ x(2y+\frac{\partial z}{\partial y})+e^z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2+z}{x+e^z} \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2xy}{x+e^z} \end{cases}$$

$(*)$两边对y求偏导: (多次求导. 非多次求微).

$$2y+\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+e^z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2y(e^z+xy^2+zx)e^z}{(x+e^z)^3}$$

例3. 设$z=z(x,y)$是$e^{x+z}-2xz+y=e$确定的隐函数. 求$\frac{\partial z}{\partial x}$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$

方程两边对x,y求偏导:

$$\begin{cases} e^{x+z}(1+\frac{\partial z}{\partial x})-2z-2x\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad (*) \\ e^{x+z}\frac{\partial z}{\partial y}-2x\frac{\partial z}{\partial y}+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2z-e^{x+z}}{e^{x+z}-2x} \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{e^{x+z}-2x} \end{cases}$$

$x=0.y=0$时 $z=1$ $\therefore \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=2e^{-1}-1$. $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=-e^{-1}$

$(*)$两边对y求偏导:

$$e^{x+z}\frac{\partial z}{\partial y}(1+\frac{\partial z}{\partial x})+e^{x+z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \xRightarrow{代入} \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$$

例4. 证明: $z^5-xz^4+yz^3-1=0$在$M(0,0,1)$某邻域内可确定z为x,y的函数$z=z(x,y)$. 计算$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_M$.

设$F(x,y,z)=z^5-xz^4+yz^3-1$. (1). F在$\mathbb{R}^3$连续 (2). $F(0,0,1)=0$. (3). $F_x'.F_y'.F_z'$连续

(4). $F_z'=5z^4-4xz^3+3yz^2$ $F_z'(M)\neq 0$ $\therefore$由隐函数存在性定理知$F(x,y,z)=0$在M某邻域内可确定$z=z(x,y)$ 且 $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$.

方程两边对x,y求偏导:

$$\begin{cases} 5z^4\frac{\partial z}{\partial x}-z^4-4xz^3\frac{\partial z}{\partial x}+3yz^2\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad (*) \\ 5z^4\frac{\partial z}{\partial y}-4xz^3\frac{\partial z}{\partial y}+z^3+3yz^2\frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z^2}{5z^2-4xz+3y} & \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M=\frac{1}{5} \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{5z^2-4xz+3y} & \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

(*)式 $5z^2\frac{\partial z}{\partial x} - z^2 - 4xz\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

两边同时对y求偏导:

$$10z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 5z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - 2z\frac{\partial z}{\partial y} - 4x\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - 4xz\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 3\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{3}{25}$.

例5. 设 $F(x+2y-z,\ x^2-y^2+e^z)=0$ 确定 $z=z(x,y)$ 且F具有一阶连续偏导. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

法一: 方程两边同时对x,y求偏导

$$\begin{cases} F_1'\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F_2'\left(2x + e^z\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \\ F_1'\left(2-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + F_2'\left(-2y + e^z\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1'+2xF_2'}{F_1'-e^zF_2'} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2F_1'+2yF_2'}{F_1'-e^zF_2'} \end{cases}$$

法二: 公式法. 令 $G(x,y,z)=F(x+2y-z,\ x^2-y^2+e^z)$ 标准化.

$G_x' = F_1'+2xF_2'$ $\quad G_z' = -F_1'+e^zF_2'$ $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G_x'}{G_z'} = \frac{F_1'+2xF_2'}{F_1'-e^zF_2'}$

法三: 一阶微分形式不变性. 方程两边同时求微分有 $F_1'(dx+2dy-dz)+F_2'(2xdx-2ydy+e^zdz)=0$

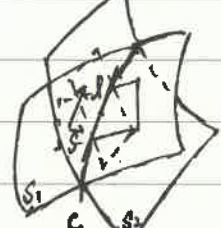
$\therefore dz = \frac{F_1'+2xF_2'}{F_1'-e^zF_2'}dx + \frac{-2F_1'+2yF_2'}{F_1'-e^zF_2'}dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

5. 隐函数组的偏导数

背景: 曲线切线 C 曲线切平面 } ⇒ 曲线切线=切平面$_1$∩切平面$_2$

曲线=曲面$_1$∩曲面$_2$

$\uparrow\ C: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$



隐函数组偏导数存在性定理: 设 $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$ 在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 某邻域满足

(1) $F(P_0)=G(P_0)=0$ 初始条件 (2) F,G存在一阶连续偏导数 $F_x', F_y', F_u', F_v', G_x', G_y', G_u', G_v'$

(3) 在 P_0 处 $J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u' & F_v' \\ G_u' & G_v' \end{vmatrix} \neq 0$ (Jacobi行列式)

则 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内唯一确定两个二元函数 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$

s.t. (1) $\begin{cases} u_0=u(x_0,y_0) \\ v_0=v(x_0,y_0) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$ (3) $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 具有一阶连续偏导数 (从而可微, 从而连续)

其中 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$ (谁对谁导谁替换谁)

证明: $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 两边同时对 x 求偏导得 $\begin{cases} F'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = -F'_x \\ G'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = -G'_x \end{cases}$

记 $J = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \triangleq \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0.$

由Cramer法则知. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{J_1}{J} = \dfrac{\begin{vmatrix} -F'_x & F'_v \\ -G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{J} = \dfrac{-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{J} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}.$

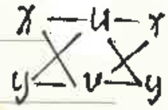
同理. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$. $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

例1. 设 $\begin{cases} u^3+3xv=y \\ v^3+3yu=x \end{cases}$ 确定 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

两边同时对 x 求偏导得 $\begin{cases} 3u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+3v+3x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ 3v^2\dfrac{\partial v}{\partial x}+3y\dfrac{\partial u}{\partial x}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{3v^3+x}{3u^2v^2-3xy} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{u^2+3yv}{3u^2v^2-3xy} \end{cases}$

例2. 设 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 均有连续偏导数. 且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. $\dfrac{\partial v}{\partial x}$. $\dfrac{\partial v}{\partial y}$. 并验证 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$.
$u=u(x,y)$. $v=v(x,y)$

方程组 函数x $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 确定 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$. 代入得 $\begin{cases} x-x(u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \\ y-y(u(x,y),v(x,y))\equiv 0. \end{cases}$



两边同时对 x 求偏导得 $\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$ 同理 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} \end{cases}$

其中 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{J}y'_v & -\frac{1}{J}x'_v \\ -\frac{1}{J}y'_u & \frac{1}{J}x'_u \end{vmatrix} = \dfrac{1}{J^2}\begin{vmatrix} y'_v & x'_v \\ y'_u & x'_u \end{vmatrix} = \dfrac{1}{J^2}\begin{vmatrix} y'_v & y'_u \\ x'_v & x'_u \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{J^2}\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \dfrac{1}{J}$ $\therefore \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1.$

例3. (球面坐标变换的Jacobi行列式) 直角坐标 (x,y,z) 与球面坐标 (ρ,φ,θ) 之间的变换公式

$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi$

注: 当 $\rho^2\sin\varphi\neq 0$ 即除 z 轴上的点外 方程组可确定 ρ,φ,θ 为 x,y,z 函数 且

$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi=\arccos\dfrac{z}{\rho} \\ \theta=\arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$

§5 偏导数在几何中的应用

1. 平面曲线的切线与法线：设 $C: F(x,y)=0$，且 F 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内满足隐函数存在条件，∴ $F(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=f(x)$，则曲线在 P_0 处切线与法线方程分别为 $(f'(x_0)\neq 0)$

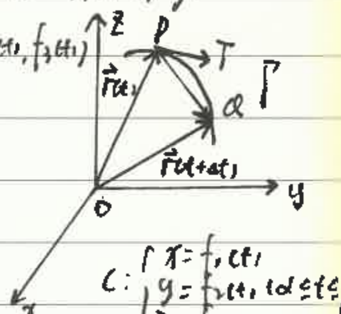
f' ↓ F'_x, F'_y

$$\begin{cases} l: y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0) \\ L: y-y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \end{cases}$$

∵ $f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$ ∴ C 在 P_0 处切线与法线为 $l\to$方向

$$\begin{cases} l: F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0 & \text{切向量 } \vec{s}=\{F'_y, F'_x\} \\ L: F'_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F'_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0 & \text{法向量 } \vec{n}=\{F'_x, F'_y\} \end{cases}$$

2. 向量值函数及其导数：设向量函数 $\vec{r}(t): \mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^3$，$\vec{r}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ 在 $U(t_0)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f_i(t)-f_i(t_0)}{t-t_0}$ 都存在（设为 b_i，$i=1,2,3$），则称 $\vec{r}(t)$ 在 $t=t_0$ 处可导，(b_1,b_2,b_3) 为 $\vec{r}(t)$ 在 $t=t_0$ 处导数，记作 $\vec{r}'(t_0)$ 或 $\dfrac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t_0}$。切向量 $r'(t)=(f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t))$



$C: \begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \quad (\alpha\le t\le\beta) \\ z=f_3(t) \end{cases}$

$\vec{r}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$ 切向量.

注：设 P、Q 分别为向量函数 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 所表示曲线上的任意两点，其对应参数为 t, $t+\Delta t$.

∴ $\vec{OP}=\vec{r}(t)$，$\vec{OQ}=\vec{r}(t+\Delta t)$，则 $\Delta\vec{r}=\vec{PQ}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$

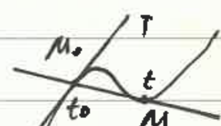
$\Delta t\to 0$ 即 Q 沿 $C: \vec{r}(t)$ 趋向 P 时，$\vec{PQ}$ 极限 $\vec{PT}$ 为 Γ 在 P 处切向量，指向 t 增加方向。

Γ 在 t 对应点 P 处切向量 $\vec{s}=\vec{r}'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$.

3. 空间曲线的切线：$\Gamma: \vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 在 M_0 处切线 $L: \dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

过切点 M_0 与切线垂直的平面称为法平面 π：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

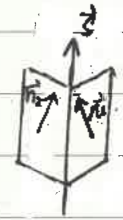
证明：M_0M：$\dfrac{x-x_0}{x(t)-x(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y(t)-y(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z(t)-z(t_0)}$



即 $\dfrac{x-x_0}{\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}}$

∴ $L: \dfrac{x-x_0}{x'(t)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t)}$

当 Γ 用 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切线可用两张曲面切平面交线表示.



$\therefore l: \begin{cases} F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0 \\ G'_x(M_0)(x-x_0)+G'_y(M_0)(y-y_0)+G'_z(M_0)(z-z_0)=0 \end{cases}$

l的$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F'_x(M_0) & F'_y(M_0) & F'_z(M_0) \\ G'_x(M_0) & G'_y(M_0) & G'_z(M_0) \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right\}$.

法平面π: $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x-x_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(y-y_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(z-z_0)=0$.

例1. 求$C: \begin{cases} y^2=2x \\ z=-x+1 \end{cases}$ 在$M(2,2,1)$处切线方程.

法一. 参数化 $\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ $\therefore \vec{s}=\{1, y'(x), z'(x)\}=\{1, \frac{1}{2}, -1\} \parallel \{2,1,-2\}$.

$\therefore L: \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-2}$

(另: $\vec{s}=\{dx, dy, dz\} \parallel \{1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\}=\{1, y'(x), z'(x)\}$).

法二. 切平面交线 $\begin{cases} F(x,y,z)=2x-y^2=0 \\ G(x,y,z)=x+z-1=0. \end{cases}$ $S_1: F(x,y,z)=0$. $\pi: x-2y+2=0$

$S_2: G(x,y,z)=0$. $\pi: x+z-3=0$

$\therefore l: \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x+z-3=0 \end{cases}$

例2. 证明$C: \vec{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$与$S: z^2=x^2+y^2$各母线相交角度相等.

$x^2(t)+y^2(t)=e^{2t}=z^2(t)$ $\therefore C\subset S$.

设交点$M(x_0,y_0,z_0)$. 对应参数t_0. $\therefore x_0=e^{t_0}\cos t_0$, $y_0=e^{t_0}\sin t_0$, $z_0=e^{t_0}$.

切向量$\vec{s}=\{e^{t_0}(\cos t_0-\sin t_0), e^{t_0}(\sin t_0+\cos t_0), e^{t_0}\}=\{x_0-y_0, x_0+y_0, z_0\}$

母线方向$\overrightarrow{OM}=\{x_0,y_0,z_0\}$. 设$\vec{s}$与$\overrightarrow{OM}$夹角为$\theta$.

$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{s}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\vec{s}||\overrightarrow{OM}|}=\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{\sqrt{2(x_0^2+y_0^2)+z_0^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{2z_0^2}{\sqrt{6}z_0^2}=\frac{2}{\sqrt{6}}$ $\therefore \theta=\arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$.

例3. 在$C: \vec{r}(t)=\{t, t^2, t^3\}$求$M_1$, M_2, M处切线与$\pi: x-y-z=10$平行.

切向量$\vec{s}=\{1,2t,3t^2\}$. π法向量$\vec{n}=\{1,-1,-1\}$. $\because$ 切线$\parallel$平面 $\therefore \vec{s}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow t=-1$或$\frac{1}{3}$

$t=-1$时 $M_1(-1,1,-1)$. $t=\frac{1}{3}$时 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27})$.

例4. 若曲线上每点处法平面过定点, 证明: 该曲线为球面曲线.

设$C: \vec{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$. $\forall M_0(x_0,y_0,z_0)=(x(t_0), y(t_0), z(t_0))\in C$. 定点$P_0(a,b,c)$.

M_0处法平面π: $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

No.

Date

∵ $P_0\in\Pi$ ∴ $x'(t_0)(a-x_0)+y'(t_0)(b-y_0)+z'(t_0)(c-z_0)=0$

由M_0任意性 $x'(t)(a-x(t))+y'(t)(b-y(t))+z'(t)(c-z(t))=0$

⟺ $(a-x(t))'(a-x(t))+(b-y(t))'(b-y(t))+(c-z(t))'(c-z(t))=0$

凑微分 $d[(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2+(z(t)-c)^2]=0$

∴ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ∴ $\forall M_0\in C$, $M_0\in S: (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

∴ $C\subset S$ 为球面曲线

4. 曲面的切平面与法线: $S: F(x,y,z)=0$, 且F在$M_0(x_0,y_0,z_0)$某邻域内满足隐函数定理条件 (不妨设 $F'_z(P_0)\neq 0$) ∴ $F(x,y,z)=0$ 确定z为x,y的函数 $z=f(x,y)$. 且$F(x,y,f(x,y))\equiv 0$,

$z_0=f(x_0,y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$

Taylor ↓ $\vec{n}=\{z'_x,z'_y,-1\}$ ↓ 隐函数求 $\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}$

∵ F均有一阶连续偏导 ∴ $f(x,y)$可微.

∴ S在M_0处切平面法向量 $\vec{n}=\{z'_x,z'_y,-1\}=\{-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},-1\}$

∴ $\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}$ 该曲面在M_0处切平面、法线的方向

$\Pi: F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$

$L: \frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$

小结: 显式曲面 $S: z=f(x,y)$ 法向量 $\vec{n}=\{f'_x,f'_y,-1\}$.

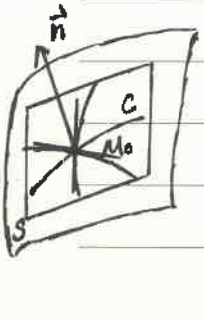
隐式曲面 $S: F(x,y,z)=0$ 法向量 $\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}$

切平面: 设 $S: F(x,y,z)=0$ 有一阶连续偏导数且不全为0 (称为光滑曲面). $\forall M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$,

过M_0在S上任作一条光滑曲线 $C: \begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$. M_0对应参数t_0.

∵ $C\subset S$ ∴ $F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$. 两边同时对$t$求导得

$F'_x(x(t),y(t),z(t))x'(t)+F'_y(x(t),y(t),z(t))y'(t)+F'_z(x(t),y(t),z(t))z'(t)=0$.



代入$t=t_0$得 $F'_x(M_0)x'(t_0)+F'_y(M_0)y'(t_0)+F'_z(M_0)z'(t_0)=0$.

记 $\vec{n}=(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0))$ $\vec{s}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ ($\vec{n}$固定)

∴ $\vec{n}\cdot\vec{s}=0$ C上M_0处切向量$\vec{s}$与固定向量$\vec{n}$垂直.

∵ C任意 ∴ 过光滑曲面上M_0且在曲面上的任意光滑曲线在M_0切线始终垂直于固定方向$\vec{n}$.

即曲线切线均在过M_0以$\vec{n}$为法向量的平面上，称为曲面在M_0处切平面.

显式曲面的切平面与法向量：对 $S: z=f(x,y)$. 若f具有一阶连续偏导. 记 $S: F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$.

$\vec{n}=\{f'_x, f'_y, -1\}$. 在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处切平面 $\Pi: z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

法线: $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

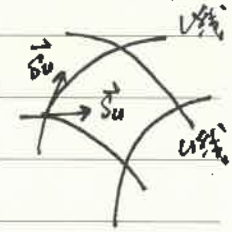
另: $S: z=f(x,y)$ 在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处曲线 $C_{y_0}: \begin{cases} z=f(x,y_0) \\ y=y_0 \end{cases}$ 切向量 $\vec{s_1}=\{1,0,f'_x(x_0,y_0)\}$

$C_{x_0}: \begin{cases} z=f(x_0,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ 切向量 $\vec{s_2}=\{0,1,f'_y(x_0,y_0)\}$.

由C_{x_0}, C_{y_0}在M_0处切线确定平面的法向量 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0,y_0) \end{vmatrix}$

$=\{-f'_x(x_0,y_0), -f'_y(x_0,y_0), 1\}$.

参数曲面的法向量：设 $S: \begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \quad (u,v)\in D_{uv} \\ z=z(u,v) \end{cases}$. 且$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$



均有一阶连续偏导数. S上给定$M_0(x_0,y_0,z_0)$所对应参数(u_0,v_0)

则参数方程中取定 $\begin{cases} v=v_0 \\ u=u_0 \end{cases}$ 得两条曲线. 切向量为 $\begin{cases} \vec{s_u}=\{x'_u(u_0,v_0), y'_u(u_0,v_0), z'_u(u_0,v_0)\} \\ \vec{s_v}=\{x'_v(u_0,v_0), y'_v(u_0,v_0), z'_v(u_0,v_0)\} \end{cases}$

$\therefore$ S在M_0处切平面法向量 $\vec{n}=\vec{s_u}\times\vec{s_v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i}+\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j}+\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}$.

例. 求 $S: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在$M(x_0,y_0,z_0)$处切平面.

令 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$ 则法向量 $\vec{n}=\{F'_x, F'_y, F'_z\}=\left\{\dfrac{2x}{a^2}, \dfrac{2y}{b^2}, \dfrac{2z}{c^2}\right\}\Big|_{M_0}=\left\{\dfrac{2x_0}{a^2}, \dfrac{2y_0}{b^2}, \dfrac{2z_0}{c^2}\right\}$

$\Pi: \dfrac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\dfrac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=1$ (替换法则)

例. 求 $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=x^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在$M(1,2,2)$处切线ℓ方程. 并求ℓ在xOy平面投影方程.

$\Pi_1: 2(x-1)+4(y-2)+4(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-9=0$

$\Pi_2: z-2=2(x-1)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z-4=0$

消去z得 $5x+6y-17=0$ $\therefore$ 投影 $\begin{cases} 5x+6y-17=0 \\ z=0 \end{cases}$

No.

Date . .

例3. 设$F(x,y,z)$具有一阶连续偏导. 证明: $F(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x})=0$上任何一点处切平面都过定点.

令$g(x,y,z)=F(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x})$. 标准化

$g'_x=\frac{1}{z}F'_2-\frac{y}{x^2}F'_3$. $g'_y=-\frac{z}{y^2}F'_1+\frac{1}{x}F'_3$. $g'_z=\frac{1}{y}F'_1-\frac{x}{z^2}F'_2$

$\therefore F(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x})=0$在$(x,y,z)$切平面 $(\frac{1}{z}F'_2-\frac{y}{x^2}F'_3)(X-x)+(-\frac{z}{y^2}F'_1+\frac{1}{x}F'_3)(Y-y)$

$+(\frac{1}{y}F'_1-\frac{x}{z^2}F'_2)(Z-z)=0$. $O(0,0,0)$满足该方程 $\therefore$ 平面过O.

例4. 设$F(x,y)$有连续一阶偏导. 证明: $F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$上任何一点处切平面过定点.

令$g(x,y,z)=F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 标准化.

$g'_x=\frac{1}{z-c}F'_1$ $g'_y=\frac{1}{z-c}F'_2$ $g'_z=-\frac{x-a}{(z-c)^2}F'_1-\frac{y-b}{(z-c)^2}F'_2$

$\therefore F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$上任一点$M(x,y,z)$处切平面$\pi$方程

$\frac{1}{z-c}F'_1(X-x)+\frac{1}{z-c}F'_2(Y-y)-(\frac{x-a}{(z-c)^2}F'_1+\frac{y-b}{(z-c)^2}F'_2)(Z-z)=0$

取$M_0(a,b,c)$成立 $\therefore \pi$恒过M_0.

例5. 设$z=f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$连续 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-x+3y-4}{x^2+y^2}=1$. 求$z=f(x,y)$在$(0,0)$切平面.

$\because z=f(x,y)$在$(0,0)$连续. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-x+3y-4}{x^2+y^2}=1$

$\therefore f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=4$ 且 $f(x,y)=x-3y+4+x^2+y^2+o(\rho^2)$. $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

记 $f(x,y)=f(0,0)+x-3y+o(\rho)$. $\therefore z=f(x,y)$在$(0,0)$可微. $dz|_{(0,0)}=dx-3dy$

切平面 π: $z=x-3y+4$.

另: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-x+3y-4}{x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow f(x,y)-x+3y-4=(x^2+y^2)(1+o(1))=(x^2+y^2)+o(\rho^2)$.

$(x,y)\to(0,0)$时 $f(0,0)=4$. $M_0(0,0,4)$.

$f(x,y)-f(0,0)=x-3y+o(\rho) \Rightarrow dz=x-3y$ π: $z-4=x-3y$

No.

Date . .

§7 条件极值与Lagrange乘数法

1. 多元函数的条件极值：附有约束条件的多元函数极值问题称为条件极值问题. 一般形式是在条件组 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\ (k=1,2,\cdots,m,\ m<n)$（$k=n$时退化为点）的限制下,求目标函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 极值. 二元函数条件极值是指在约束条件 $g(x,y)=0$ 下,求 $f(x,y)$ 的极值.

（若能从 $g(x,y)=0$ 中解出 $y=y(x)$ 或 $x=x(y)$ 代入目标函数 $f(x,y)$,则可化为一元函数极值）.

2. Lagrange乘数法：设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内存在连续偏导数,且 $g(x,y)$ 在 P_0 处偏导数不全为0,则在条件 $C: g(x,y)=0$ 下,目标 $f(x,y)$ 在 P_0 处有极值的必要条件是 $\exists\lambda$ s.t.

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda g'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda g'_y(x_0,y_0)=0 \\ g(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

（条件极值→无条件极值）引入 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ 转化为二元函数无条件极值必要条件（需具体判断是否取极值）.

证明：不妨设 $g'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 由隐函数存在定理知 $\exists$ 邻域 $U(x_0,\delta_0)$ 内函数 $y=\varphi(x)$,

s.t. $y_0=\varphi(x_0)$ 且 $\forall x\in U(x_0,\delta_0)$: $g(x,\varphi(x))=0$.

$\because$ $f(x,y)$ 在条件 $g(x,y)=0$ 下 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处有极值

$\therefore$ $h(x)=f(x,\varphi(x))$ 在 $x=x_0$ 处有极值. 从而 $h'(x_0)=0$ 即 $f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot\varphi'(x_0)=0$

又 $\varphi'(x_0)=-\dfrac{g'_x(x_0,y_0)}{g'_y(x_0,y_0)}$ 代入得 $f'_x(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\dfrac{g'_x(x_0,y_0)}{g'_y(x_0,y_0)}=0$.

令 $\lambda=-\dfrac{f'_y(x_0,y_0)}{g'_y(x_0,y_0)}$ $\Rightarrow$ $f'_y(x_0,y_0)+\lambda g'_y(x_0,y_0)=0$

$$\therefore \begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda g'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda g'_y(x_0,y_0)=0 \\ g(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$ 下的极值.

构造Lagrange函数（λ,μ为Lagrange乘数）.

设 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$.

$$令\begin{cases} L'_x=f'_x+\lambda g'_x+\mu h'_x=0 \\ L'_y=f'_y+\lambda g'_y+\mu h'_y=0 \\ L'_z=f'_z+\lambda g'_z+\mu h'_z=0 \\ L'_\lambda=g(x,y,z)=0 \\ L'_\mu=h(x,y,z)=0 \end{cases}$$

求出 (x,y,z) 的值,再比较所得 $f(x,y,z)$ 函数值,从而得到其极值.

3. 条件极值存在的几何意义：由 $f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot\varphi'(x_0)=0$ 及 $\varphi'(x_0)=-\dfrac{g'_x(x_0,y_0)}{g'_y(x_0,y_0)}$ 得

No.

Date . .

$f'_x(x_0,y_0)\cdot g'_y(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\,g'_x(x_0,y_0)=0$

说明 $z=f(x,y)$ 等高线 $f(x,y)=f(P_0)$ 与 $C: g(x,y)=0$: $g(x,y)=0$ 在 P_0 处有公切线

$f(x,y)=f(P_0)$ 两边微分得 $f'_x(P)dx+f'_y(P)dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{P_0}=-\frac{f'_x(P_0)}{f'_y(P_0)}$

$g(x,y)=0$ 两边微分得 $g'_x(P)dx+g'_y(P)dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{P_0}=-\frac{g'_x(P)}{g'_y(P)}$

$\therefore -\frac{f'_x(P)}{f'_y(P)}=-\frac{g'_x(P)}{g'_y(P)}$ 有公切线.

未完待续...

(多元函数积分学 / 场论初步 / 含参积分)